

1.Düzlemde Eğik ve Dik Koordinat Sistemi

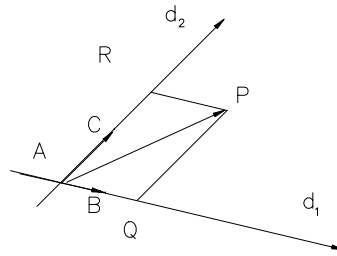
Bu bölüme Analitik Geometrinin kuruluşuna temel teşkil eden ve adına **Nokta-Vektör** eşlemesi diyeceğimiz , düzlemin afin aksiyomlarını vererek başlamak uygun olacaktır.

Afin Aksiyomlar :

1. Düzlemin herhangi A, B gibi iki noktası verildiğinde ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek $\vec{u}$ vektörü vardır.

2. Düzlemde bir A noktası ve R^2 vektör uzayının bir $\vec{u}$ vektörü verildiğinde ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek B noktası vardır.

1.1.Düzlemde Eğik Koordinat Sistemi



Şekil 1.1.1

Düzlemde bir A noktası ve lineer bağımsız $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ vektör cümlesi verildiğinde Nokta-Vektör eşlemesinden ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ olacak şekilde

2 Düzlemde Eğik ve Dik Koordinat Sistemleri -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

B, C noktalarının varlığını biliyoruz. A noktasından geçen ve $\vec{u}$ vektörüne paralel olan doğruyu d_1 , $\vec{v}$ vektörüne paralel olan doğruyu da d_2 ile gösterelim. Düzlemin keyfî bir noktası P olsun. P noktasından d_2 doğrusuna paralel çizip d_1 doğrusunu kestiği noktaya Q ve d_1 doğrusuna paralel çizip d_2 doğrusunu kestiği noktaya da R diyelim.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AR}$$

olduğundan ve

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{AQ} = x(P)\vec{u}$$

$$\overrightarrow{AR} = y(P)\vec{v}$$

olarak yazılabileceğinden

$$\overrightarrow{AP} = x(P)\vec{u} + y(P)\vec{v}$$

bulunur. Böylece düzlemin her bir P noktasına $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesini sabit tutarak, $(x(P), y(P))$ reel sayı ikilisini karşılık tutarız.

Tersine $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesi sabit kalmak üzere; bir (a, b)

reel sayı ikilisi verildiğinde

$$\overrightarrow{AP} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

olacak şekilde bir tek P noktasının bulunacağı, Nokta-Vektör eşlemesinden açıktır. O halde düzlemin noktaları ile reel sayı ikililerinin cümlesi olan R^2 arasında $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesini sabit tutularak bire-bir eşleme kurmuş oluruz.

Buradaki $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ üçlüsüne düzlemin bir **eğik(afin,paralel) koordinat sistemi** , A noktasına bu koordinat sisteminin **orijini** , $(x(P), y(P))$ ikilisine de bu koordinat sistemine göre P noktasının **eğik(afin,paralel) koordinatları** denir. Biz bu eşleme nedeniyle düzlemin her bir P noktası için $P = (x(P), y(P))$ gösterimini kullanacağız. Ayrıca d_1, d_2 doğrularına bu koordinat sisteminin **koordinat eksenleri** , $\vec{AB} = 1.\vec{u} + 0.\vec{v}$, $\vec{AC} = 0.\vec{u} + 1.\vec{v}$ olduğundan da $B = (1,0), C = (0,1)$ noktalarına koordinat sisteminin **birim noktaları** denir.

Yukarıdaki tanımlardan ; P noktasından her bir eksen üzerine , diğer eksen doğrultusunda, paralel izdüşümler alınarak oluşturulan reel sayı ikilisi ile , eğik koordinat sisteminde bir P noktasının koordinatlarının gösterildiği görülür. İlk eksen (X – eksen) genellikle yatay olarak çizilir.

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ vektör cümlesinin ortonormal olması halinde ; $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesine düzlemin **Kartezyen(Dik Dörtgensel,Dik,Öklidyen)** koordinat sistemi karşılık gelir.

1.1.1.Düzlemde Bir Noktanın Yer Vektörü

Düzlemde $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemi seçelim . Q noktasının bu koordinat sistemine göre koordinatları (b_1, b_2) olsun. Afin koordinat sisteminin yukarıdaki tanımından;

$$\vec{AQ} = b_1\vec{u} + b_2\vec{v}$$

veya

$$\vec{AQ} = (b_1, b_2)$$

4 Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

vektörüne Q noktasının yer vektörü denir.

1.1.2.Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Düzlemin koordinat eksenleri arasındaki pozitif yönlü açısı α olan, $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemini seçelim . Bu koordinat sisteminde koordinatları $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ olan noktalar da sırasıyla P, Q olsun.

Afin koordinat sisteminin yukarıdaki tanımından;

$$\overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1)\vec{u} + (b_2 - a_2)\vec{v}$$

veya

$$\overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

bulunur.

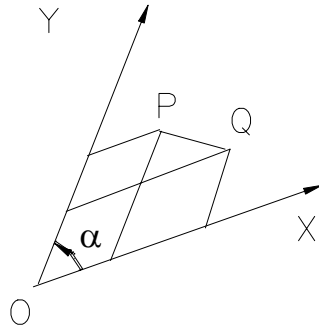
$$d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$$

değerine veya

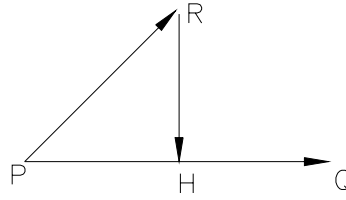
$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + 2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cos \alpha} \quad (1.1.2.1)$$

değerine P, Q noktaları arasındaki uzaklık denir.



Şekil.1.1.2

1.1.3.Düzlemde Alan



Şekil.1.1.3.1

Düzlemde doğrudan olmayan herhangi üç nokta P, Q, R olsun. R noktasından P, Q noktalarından geçen doğruya dik indirip, bu dik ayağına H diyelim. **Şekil.1.1.3.1** den

$$\overrightarrow{PH} = \frac{\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle} \overrightarrow{PQ}$$

vektörüne $\overrightarrow{PR}$ vektörünün $\overrightarrow{PQ}$ üzerine **dik izdüşüm vektörü** denir.

$$\overrightarrow{RH} = \frac{\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle \overrightarrow{PQ} - \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle \overrightarrow{PR}}{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$$

vektörüne de P, Q, R noktaları üzerine kurulan paralel kenarın PQ kenarına ait **yükseklik vektörü** denir. $\overrightarrow{RH}$ vektörünün uzunluğuna da paralel kenarın PQ kenarına ait **yüksekliği** denir. Buna göre ;

6 Düzlemde Alan -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

$$\|\overrightarrow{RH}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle \langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PR} \rangle - \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle^2}$$

veya

$$\|\overrightarrow{RH}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \left| \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{PQ} & \overrightarrow{PR} \end{bmatrix} \right|$$

bulunur. Buradan da bu noktalar üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$\nu(P, Q, R)$ ile gösterilmek üzere;

$$\nu(P, Q, R) = \left| \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{PQ} & \overrightarrow{PR} \end{bmatrix} \right|.$$

bulunur.

Koordinat eksenleri arasındaki açısı α olan $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemine göre bu noktaların koordinatları $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ ise

$$\nu(P, Q, R) = \left| \det \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{bmatrix} \right| \sin \alpha$$

dır.

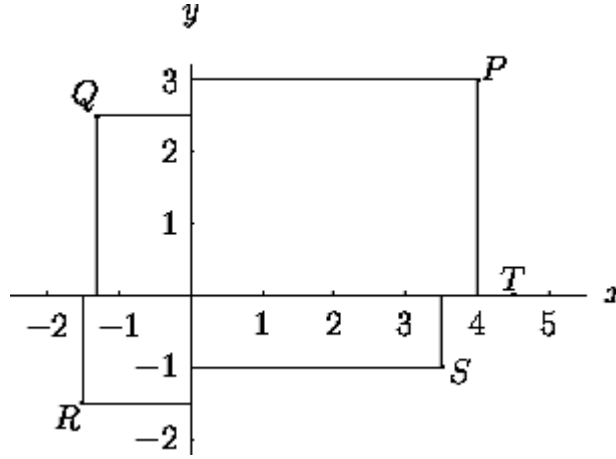
1.2 Düzlemde Dik (Kartezyen) Koordinatlar

Bugün temel matematiğin gereksinim duyduğu ilk enstrüman , kartezyen koordinat sistemidir.

Kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın koordinatları ; bu noktanın yer vektörünün koordinat eksenleri üzerine alınan dik izdüşümlerden oluşacağı ,eğik koordinat sistemlerinin tanımından açıktır. Eğer koordinatların biri x diğeri y ile belirtilip eksenlerde X –ekseni ve Y –ekseni diye söylenirse , $P = (x, y)$ şeklinde gösterilir. Buradaki eşitlik karşılık gelme anlamındadır.

7 Düzlemde Alan -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

Genellikle X – ekseni yatay olarak çizilip, orijinden itibaren sağa doğru artar ; Y – ekseni de düşey olarak çizilip ,orijinden itibaren yukarı doğru artar(**Şekil.1.2.1**).



Şekil 1.2.1: Kartezyen koordinatlarda $P=(4,3)$, $Q=(-1.3,2.5)$, $R=(-1.5,-1.5)$, $S=(3.5,-1)$ ve $T=(4.5,0)$.

Eksenler düzlemi dört bölgeye ayırırlar. Şekil 1.2.1 de P birinci bölgede , Q ikinci bölgede , R üçüncü bölgede ve S de dördüncü bölgededir. T , X – ekseninin pozitif kısmındadır.

Kartezyen koordinatlarda P, Q noktaları arasındaki uzaklığın

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

şeklinde olacağı , **(1.1.2.1)** eşitliğinde $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alınarak görülür.

1.3.Düzlemde Doğrular

Düzlemde $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda((x_1, y_1) - (x_0, y_0))$$

şeklinde λ parametresine bağlı olarak verilebilir. Bu eşitliğe A, B noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi denir.

1.3.1.Düzlemde Doğruların Bazı Özellikleri

1.3 de λ parametresi yok edilerek, $x_1 \neq x_0, y_1 \neq y_0$ olmak üzere;

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \lambda$$

bulunur. Bu eşitliklerinden doğrunun kapalı denklemi de

$$ax + by + c = 0$$

şeklinde olur.

Doğrunun eğimi

Düzlemde bir doğrunun $X -$ eksenini ile yaptığı açının tanjantına bu

doğrunun eğimi denir. Bu açı $k\pi, \frac{(2k-1)\pi}{2}$ den farklı olsun.

Bir doğru üzerindeki herhangi iki noktadan $X -$ eksenine çizilen paralellerin doğru ile yaptığı pozitif yönlü açı aynı olduğundan ,doğrunun eğimi , doğru için bir karakteristiktir. Yani ; aynı noktadan geçen ve aynı eğime sahip bir tek doğru vardır.

$$ax + by + c = 0$$

doğrusunun eğimi

9 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

$$m = \frac{-a}{b}$$

ve $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi de

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

eşitliklerinden bulunur.

- Doğrunun $X -$ eksenine ile kesiştiği noktanın orijine uzaklığı $\frac{-c}{a}$ birim

ve $Y -$ eksenine ile kesiştiği noktanın orijine uzaklığı da $\frac{-c}{b}$ birimdir.

- Eğer $a = 0$ ise (veya doğru $X -$ eksenine ile $k\pi$ açısı yapıyorsa) , $X -$ eksenine paralel , $b = 0$ ise (veya doğru $Y -$ eksenine ile $\frac{(2k-1)\pi}{2}$ açısı yapıyorsa) ,doğru $Y -$ eksenine paraleldir.

- $a^2 + b^2 = 1$ ve $c \leq 0$ ise

$$ax + by + c = 0$$

denklemine **doğrunun normal formu** ve buradaki $p = -c$ değerine de

doğrunun orijine uzaklığı denir. $w = \arcsin(a) = \arccos(b)$ açısına

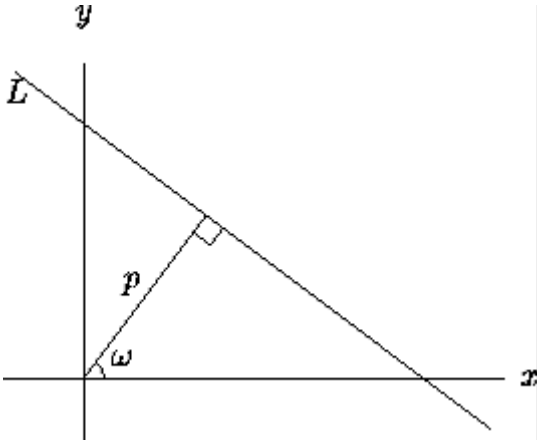
orijinden doğruya indirilen dikmenin $X -$ eksenin pozitif kısmıyla yaptığı açı denir. Bu halde

$$\vec{N} = (a, b) = (\cos w, \sin w)$$

vektörüne doğrunun **birim normal vektörü** denir. $\vec{\gamma} = (-b, a)$ vektörüne

de **doğrunun birim doğrultman vektörü** denir.

10 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa



Şekil.1.3.1.1 : L doğrusunun normal formu $p = x \cos w + y \sin w$

Herhangi $ax + by + c = 0$ denklemlı doğrunun normal formunu elde etmek için aşağıdaki yol izlenir :

Denklemin her iki yanını $c < 0$ ise $\sqrt{a^2 + b^2}$ değerine , $c > 0$ ise

$-\sqrt{a^2 + b^2}$ değerine ve $c = 0$ olması halinde $b > 0$ ise $\sqrt{a^2 + b^2}$, $b < 0$

ise $-\sqrt{a^2 + b^2}$ değerine bölerek normal formu bulunur.

1.3.2.Düzlemde Doğrunun Bazı Özel Halleri

- X - eksenı ile $x = x_0$ da kesişen m eğimli doğrunun denklemi,

$$y = m(x - x_0) \text{ dır.}$$

- Y - eksenı ile $y = y_0$ da kesişen m eğimli doğrunun denklemi,

$$y = mx + y_0 \text{ dır.}$$

- X - eksenı ile $x = x_0$ da , Y - eksenı ile $y = y_0$ da kesişen

doğrunun denklemi ,

11 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

olup , bu denklem eğik koordinatlarda da aynen geçerlidir. Ayrıca bu denkleme ; doğrunun eksenlerden ayırdığı parçalar cinsinden denklemi denir.

- Eğimi m olan ve (x_0, y_0) noktasından geçen doğrunun denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dir.

- $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde determinant yardımıyla da bulunur. Bu formül eğik koordinatlarda da geçerlidir.

- $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ noktalarıyla sınırlı doğru parçasını λ oranında bölen noktanın koordinatları

$$B = \left(\frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} \right)$$

veya

$$B = \frac{P + \lambda Q}{1 + \lambda} \text{ dır.}$$

12 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

- $P = (x_0, y_0)$ noktasından $Q = (x_1, y_1)$ noktasına olan yolun

$\%k$ noktasının koordinatları veya diğer bir deyişle $P = (x_0, y_0)$,

$Q = (x_1, y_1)$ noktalarıyla sınırlı doğru parçasını $\lambda = \frac{k}{100-k}$ oranında

bölen noktanın koordinatları

$$\left(\frac{kx_1 + (100-k)x_0}{100}, \frac{ky_1 + (100-k)y_0}{100} \right).$$

olup,

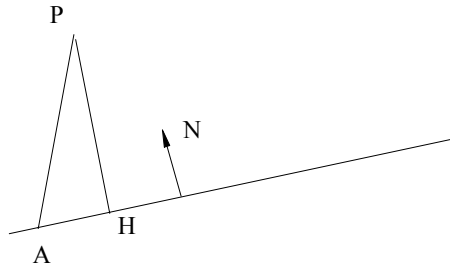
$P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ noktalarıyla sınırlı doğru parçasını $\lambda = 1$

oranında bölen noktanın koordinatları

$$\left(\frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{y_1 + y_0}{2} \right)$$

dır.

1.3.3.Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı



Şekil.1.3.3.1

13 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

Düzlemde bir P noktasının , A noktasından geçen ve normali $\vec{N}$ olan doğruya olan uzaklığı , bu noktadan doğruya indirilen dikmenin uzunluğu olarak tanımlanır. **Şekil 1.3.3.1** den

$$\overrightarrow{PH} = \mu \vec{N} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}, \langle \overrightarrow{AH}, \vec{N} \rangle = 0$$

olduğundan

$$\overrightarrow{PH} = \frac{-\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$$

ve

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

bulunur.

Buna göre;

$$L...ax + by + c = 0$$

denklemlı doğrunun $P = (x_0, y_0)$ noktasına olan uzaklığı

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

olur.

1.3.4.Düzlemde İki Doğru Arasındaki Aç

$$d_1.....a_0x + b_0y + c_0 = 0$$

$$d_2.....a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

14 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

doğruları arasındaki açı θ ise θ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- Doğrular arasındaki açı

$$\theta = \arctan \left(\frac{\left| \frac{\vec{N}_1}{N_2} \right|}{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle} \right)$$

$$\theta = \arctan \frac{b_1}{a_1} - \arctan \frac{b_0}{a_0} = \arctan \left(\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0 a_1 + b_1 b_0} \right)$$

eşitliklerinden elde edilebilir.

- $a_0 b_1 = a_1 b_0$ iken doğrular paralel
- $a_0 a_1 = -b_1 b_0$ iken de doğrular diktir.
- Eğimleri m_0, m_1 olan iki doğru için

$$\theta = \arctan \left(\frac{m_1 - m_0}{1 + m_0 m_1} \right).$$

- Eğimleri m_0, m_1 olan iki doğru için $m_0 = m_1$ ise doğrular paralel
 $m_0 m_1 = -1$ ise doğrular diktir.

1.3.5.Düzlemde Doğruların Noktadaşlığı ve Noktaların Doğrudaşlığı

Düzlemde üç doğru eğik koordinatlarda

15 Düzlemde Doğrular -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

$$d_1....a_0x + b_0y + c_0 = 0$$

$$d_2....a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_3....a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

olmak üzere; aşağıdakilerin doğru olduğu lineer denklem sisteminin çözümünden görülebilir.

- Üç doğru noktadadır $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

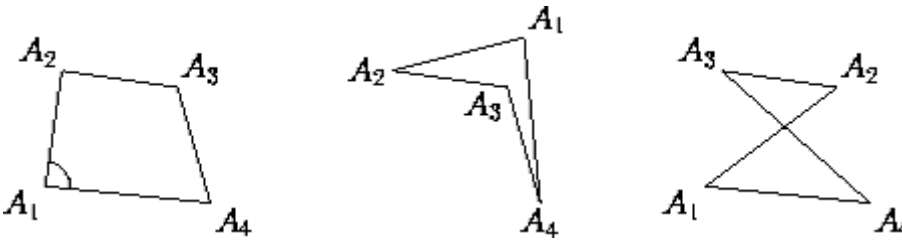
- Üç noktanın koordinatları $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ olsun.

$$\text{Üç nokta doğrudadır} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.4.Poligonlar

$k \geq 3$ olmak üzere;düzlemdeki sıralı $A_1, A_2, \dots, A_k$ noktalarını ardışık olarak birbirine ve sonuncusunu da birincisine doğru parçalarıyla bağlayarak elde edilen geometrik şekle düzlemde **bir $k - \text{kenarlı poligon}$** ya da $k - \text{gen}$ denir. Buradaki $A_i, i = 1, \dots, k$ noktalarına poligonun **köşe** ya da **tepe noktaları** $A_i A_{i+1}, i = 1, \dots, k$ doğru parçalarına da **poligonun kenarları** ya da **ayrıtları** denir. $k = 3$ ise poligon **üçgen** , $k = 4$ ise poligon **dörtgen** şeklinde isimlendirilir.

Bir poligonun ardışık kenarları aynı doğru üzerinde olmayan ve herhangi iki kenarı -ardışık iken ortak tepeleri hariç- kesişmeyen poligonlara **basit poligon** denir.



Şekil.1.4.1 : İki basit(baştaki ve ortadaki) bir basit olmayan poligon

- Bundan böyle poligon sözcüğünden basit poligonu anlayacağız
Poligonun herhangi tepe noktasındaki- iki kenarı arasındaki - açığa poligonun bir **iç açısı** denir ve tepe noktasının sembolüyle gösterilir. Bu açının tümleyenine - veya geometrik olarak tepe noktasındaki bir kenar ile

diğerinin uzantısı arasındaki açıya-poligonun bu tepe noktasındaki **dış açısı** denir. Herhangi $k -$ genin iç açılarının toplamı $(k - 2)\pi$.
Buna göre; üçgenin iç açıları toplamı π dörtgeninki de 2π olur.
Seçilen bir koordinat sisteminde ;tepe noktalarının koordinatları
 $A_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, k$ olan bir poligonun sınırladığı bölgenin alanı , eksenler arasındaki açı α ve $x_{k+1} = x_1, y_{k+1} = y_1$ olmak üzere ;

$$v(A_1, A_2, \dots, A_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \sin \alpha$$

şeklinde olacağı **1.1.3.** paragraf kullanılarak görülebilir.

2.Düzlemin Bazı Dönüşümleri

Düzlemde her bir (x, y) noktasını aynı koordinat sisteminde bir başka nokta ile eşleştirme kuralına düzlemin bir **dönüşümü** denir. Bir dönüşümün kuralı

$$F : R^2 \rightarrow R^2$$
$$(x, y) \rightarrow F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

şeklinde belirtilir.

Örneğin ; (x, y) noktasını d birim aşağıya öteleme dönüşümünün kuralı

$$F : R^2 \rightarrow R^2$$
$$(x, y) \rightarrow F(x, y) = (x, y - d)$$

şeklindedir.

Bu örnekte de olduğu gibi ; koordinatları bilinen bir nokta üzerine bir dönüşümün etkisi , dönüşüm yardımı ile hemen bulunabilir. Diğer taraftan $C(x, y) = 0$ kapalı denklemi ile verilen bir nesnenin F dönüşümü altındaki görüntüsünün denklemini bulmak için ,bu dönüşümün

$$(x, y) = G(F(x, y)), (x, y) = F(G(x, y))$$

özelliğinde

$$G : R^2 \rightarrow R^2$$
$$(x, y) \rightarrow G(x, y)$$

biçimindeki tersine ihtiyacımız vardır. Eğer F dönüşümünün G tersini bulabiliyorsak verilen nesnenin dönüşüm altındaki görüntüsünün kapalı denklemini

$$C(G(x, y)) = 0$$

şeklinde bulabiliriz.

2.1.Düzlemde Öteleme ve Özellikleri

Düzlemin bir $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemini sabit tutalım.

$\vec{\beta} = (a, b)$ olmak üzere ;

$$T_{\vec{\beta}} : R^2 \rightarrow R^2, T_{\vec{\beta}}(x, y) = (x - a, y - b)$$

dönüşümüne düzlemde $\vec{\beta} = (a, b)$ doğrultusunda **öteleme** dönüşümü denir.

Ötelemelerin aşağıdaki özellikleri öteleme tanımı kullanarak gösterilebilir.

$$1. \quad T_{\vec{\beta}} \circ T_{\vec{\gamma}} = T_{\vec{\beta} + \vec{\gamma}} = T_{\vec{\gamma}} \circ T_{\vec{\alpha}}$$

- ötelemeler bileşke işlemine göre kapalı ve değişmelidir

$$2. \quad T_{\vec{\beta}}^{-1} : R^2 \rightarrow R^2, T_{\vec{\beta}}^{-1}(x, y) = (x + a, y + b)$$

- Her ötelemenin tersi de ters doğrultuda bir ötelemedir

$$3. \quad d(T_{\vec{u}}(P), T_{\vec{u}}(Q)) = d(P, Q)$$

- ötelemeler uzunlukları korur

$$4. \quad \nu(T_{\vec{u}}(P), T_{\vec{u}}(Q), T_{\vec{u}}(R)) = \nu(P, Q, R)$$

- ötelemeler alanları korur

$$5. \left\langle \overrightarrow{T_{\vec{u}}(P)T_{\vec{u}}(Q)}, \overrightarrow{T_{\vec{u}}(R)T_{\vec{u}}(S)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \right\rangle$$

- ötelemeler açıları korur

Kapalı denklemle verilen bir nesnenin , verilen bir dönüşüm altındaki görüntüsünün kapalı denklemini bulmaya örnek olarak ;
verilen nesneyi

$$C(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

denklemleri bir çember verilen dönüşümü de , verilen her noktayı d birim kadar Y –ekseni doğrultusunda aşağıya öteleme alırsak, ters dönüşüm de d birim kadar Y –ekseni doğrultusunda yukarıya öteleme olur .Bu dönüşüm için

$$G : R^2 \rightarrow R^2$$
$$(x, y) \rightarrow G(x, y) = (x, y + d)$$

olur. Çemberin ötelenmiş denklemi de

$$C(G(x, y)) = x^2 + (y + d)^2 - 1 = 0$$

şeklinde bulunur.

2.2.Düzlemde Bir Nokta Etrafında Dönme ve Özellikleri

Düzlemde koordinat eksenleri arasındaki açı α olan $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemini alalım.

$$R_{\theta}^{\alpha} : R^2 \rightarrow R^2, \beta = (\alpha - \theta), \gamma = (\theta + \alpha), P = (x, y)$$

$$R_{\theta}^{\alpha}(x, y) = \left(\frac{(\cos \theta - \cos \alpha \cos \beta)x + (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \theta)y}{\sin^2 \alpha}, \frac{(-\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta)x + (\cos \theta - \cos \alpha \cos \gamma)y}{\sin^2 \alpha} \right)$$

dönüşümüne düzlemde **A noktası etrafında θ açısı kadar dönme dönüşümü** denir.

Özel olarak dik koordinat sisteminde A noktası etrafındaki dönme dönüşümü yukarıda $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alarak,

$$R_{\theta} : R^2 \rightarrow R^2$$

$$R_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

şeklinde bulunur. Bu dönüşümlerin terslerine A noktası etrafında θ açısı kadar **ters dönme dönüşümleri** denir ve sırasıyla;

$$(R_{\theta}^{\alpha})^{-1} : R^2 \rightarrow R^2, \beta = (\alpha - \theta), \gamma = (\theta + \alpha)$$

$$(R_{\theta}^{\alpha})^{-1}(x, y) = \left(\frac{(\cos \theta - \cos \alpha \cos \gamma)x + (-\cos \gamma + \cos \alpha \cos \theta)y}{\sin^2 \alpha}, \frac{(\cos \alpha \cos \theta - \cos \beta)x + (\cos \theta - \cos \alpha \cos \gamma)y}{\sin^2 \alpha} \right)$$

$$R_{\theta}^{-1} : R^2 \rightarrow R^2$$

$$R_{\theta}^{-1}(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

şeklinde bulunur.

2.3.Bir Nokta Etrafında Dönme Dönüşümünün Özellikleri

Dik koordinat sisteminde orijin etrafında dönme tanımı kullanılarak; dönmenin aşağıdaki özellikleri gösterilir.

$$1. R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2} = R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1}$$

- Dönmeler bileşke işlemine göre kapalı ve değişmelidir

$$2. R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta}$$

- Her dönmenin tersi de ters yönde bir dönmedir

$$3. d(R_{\theta}(P), R_{\theta}(Q)) = d(P, Q)$$

- Dönme dönüşümleri uzunlukları korur

$$4. \nu(R_{\theta}(P), R_{\theta}(Q), R_{\theta}(R)) = \nu(P, Q, R)$$

- Dönme dönüşümleri alanları korur

$$5. \langle \overrightarrow{R_{\theta}(P)R_{\theta}(Q)}, \overrightarrow{R_{\theta}(S)R_{\theta}(L)} \rangle = \langle R_{\theta}(\overrightarrow{PQ}), R_{\theta}(\overrightarrow{SL}) \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{SL} \rangle$$

- Dönme dönüşümleri açıları korur

$$6. R_{\theta}(\lambda \overrightarrow{AP} + \mu \overrightarrow{AS}) = \lambda R_{\theta}(\overrightarrow{AP}) + \mu R_{\theta}(\overrightarrow{AS})$$

- Dönme dönüşümü lineerdir.

$$7. \tilde{R}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ matrisine düzlemde **pozitif yönde dönme matrisi**}$$

denir.

8. $\tilde{R}_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ matrisine düzlemde **pozitif yönde ters dönme** matrisi denir.

2.4. Diğer Dönme Örnekleri

2.4.1.Hiperbolik Dönme

$$R_H : R^2 \rightarrow R^2, R_H(x, y) = \left(\frac{x}{\mu}, \mu y \right)$$

şeklindeki dönüşüme **Hiperbolik Dönme** denir.

Bu dönüşüm $xy = c$ hiperbolünü değiştirmediğinden ve determinantı 1 olduğundan Öklidyen dönmenin Lorentz düzlemindeki versiyonudur. Bu nedenle de adına hiperbolik dönme denir. Bu dönüşüm, çemberleri elipslere alan koruyarak dönüştürür.

2.4.2.Parabolik Dönme

$$R_p : R^2 \rightarrow R^2, R_p(x, y) = (x + 1, 2x + y + 1)$$

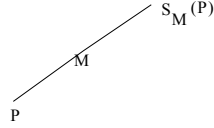
şeklinde tanımlı dönüşüme **Parabolik Dönme** denir. Bu dönüşüm $y = x^2$ parabolünü değiştirmediğinden parabolik dönme denmektedir.

2.4.3.Ötelemeli Dönme

Bir öteleme ve bir dönmenin bileşkesinden oluşan dönüşüme **ötelemeli dönme** denir. Ötelemeli dönmenin ifadesi öteleme ve dönme dönüşümlerinin ifadelerinin bileşkesinden bulunabileceğinden burada vermeyeceğiz.

2.5.Düzlemde Yansımalar

2.5.1.Düzlemde Bir Noktaya Göre Yansımalar

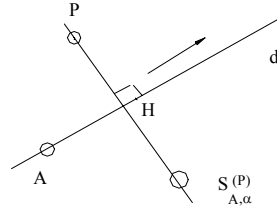


Şekil 2.5.1.1

Düzlemin sabit noktası M ve değişken noktası da P olsun. P, M noktalarından geçen doğru üzerinde bulunan ve $\overrightarrow{PM}$ vektörüyle aynı doğrultuda, aynı yönde, eşit uzunluktaki $\overrightarrow{MP'}$ vektörünün uç noktası olan P' noktasına, P noktasının M noktasına göre simetrisi denir ve $P' = S_M(P)$ şeklinde gösterilir.

$S_M : R^2 \rightarrow R^2, S_M(P) = 2M - P$ dönüşümüne de M noktasına göre yansımalar denir.

2.5.2.Düzlemde Bir Doğruya Göre Yansımalar



Şekil 2.5.2.1

Düzlemde
 $d \dots X = A + \lambda \vec{\alpha}$

parametrik denklemiyle verilen doğruyu göz önüne alalım.

Bir P noktasından d doğrusuna indirilen dikmenin ayağı H olsun $\overrightarrow{PH}$ vektörüyle aynı yönde ,aynı doğrultuda ve eşit uzunluktaki $\overrightarrow{HP'}$ vektörünün uç noktası olan P' noktasına ; P noktasının d doğrusuna göre simetriği denir ve $P' = S_{A, \vec{\alpha}}(P)$

şeklinde gösterilir.

Buna göre ;

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PH}$$

veya

$$H = \frac{P + P'}{2}$$

olur. H doğru üzerinde olduğundan

$$F = A + \lambda_0 \vec{\alpha}$$

olacak şekilde bir tek $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan

$$\frac{P + P'}{2} = A + \lambda_0 \vec{\alpha} \quad (2.5.2.1)$$

ve tanım nedeniyle

$$\langle \overrightarrow{PP'}, \vec{\alpha} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{P'}, \vec{\alpha} \rangle = \langle \vec{P}, \vec{\alpha} \rangle$$

dır.

(2.5.2.1) eşitliğinin her iki yanını $\vec{\alpha}$ ile iç çarpıma tabi tutarak

$$\lambda_0 = \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2}$$

bulunur. Böylece **(2.5.2.1)** den

$$P' = 2A - P + \frac{2\langle \overrightarrow{AP}, \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$$

bulunur.

$$S_{A, \vec{\alpha}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, S_{A, \vec{\alpha}}(P) = 2A - P + \frac{2\langle \overrightarrow{AP}, \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme d doğrusuna göre yansıma denir.

29 Düzlemde Diğer Yansıma Örnekleri -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

Düzlemde bir doğruya göre yansıma yukarıda olduğu gibi doğrunun doğrultman vektörüne bağlı olarak hesaplandığı gibi doğrunun normal vektörüne bağlı olarak da hesaplanabilir. Her ikisinde de aynı yansıma elde edilir.

Düzlemde

$$d...X = A + \lambda \vec{\alpha}$$

parametrik denklemleriyle verilen doğrunun normali $\vec{N}$ olsun

$$\vec{PH} = \mu \vec{N}$$

veya

$$\vec{AH} - \vec{AP} = \mu \vec{N}$$

eşitliğinden

$$\mu = \frac{-\langle \vec{AH}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle}$$

ve

$$\vec{PH} = \frac{-\langle \vec{AH}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N}$$

bulunur. Buradan ;

$$S_{A, \vec{N}}(P) = P - \frac{2\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N}$$

şeklinde yansıma dönüşümü elde edilir

2.5.3. Diğer Yansıma Örnekleri

2.5.3.1. Hiperbolik Yansıma

30 Düzlemde Diğer Yansıma Örnekleri -Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

$$S_H : R^2 \rightarrow R^2, S_H(x, y) = \left(\frac{x}{\mu}, -\mu y \right)$$

Şeklindeki dönüşüme **Hiperbolik Yansıma** denir.

Bu dönüşüm $xy = c$ hiperbolünün kollarını birbirlerine dönüştürür.

determinantı -1 olduğundan Öklidyen Yansımanın Lorentz düzlemindeki versiyonudur.

2.5.3.2.Parabolik Yansıma

$$S_P : R^2 \rightarrow R^2, S_P(x, y) = (x+1, 2x-y+1)$$

şeklinde tanımlı dönüşüme **Parabolik Yansıma** denir.

2.5.3.3.Ötelemeli Yansıma (glide-reflection)

Bir

$$L \dots ax + by + c = 0$$

doğrusuna göre yansıma S_L ve L doğrusu boyunca $\frac{k}{\|\vec{u}\|}$ birim öteleme

$$T \frac{k\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

olmak üzere ;

$$T \frac{k\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \circ S_L \text{ dönüşümüne } \mathbf{\text{Ötelemeli Yansıma}} \text{ denir.}$$

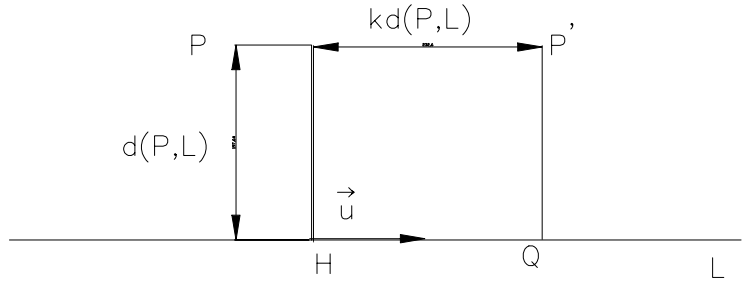
Bu tanıma göre ;

$$T_{k \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}} \circ S_L(x, y) = \left(\frac{(b^2 - a^2)x - 2aby - 2ac \pm ad}{a^2 + b^2}, \frac{-2abx + (a^2 - b^2)y - 2bc \mp bd}{a^2 + b^2} \right)$$

elde edilir.

2.5.4.Düzlemde Bir Doğruya Göre Kırpma Dönüşümü

Verilen bir doğru üzerindeki noktaları sabit bırakan ve diğer bütün noktaları da doğruya olan uzaklıklarının belli katı oranında, doğru boyunca öteleyen dönüşüme **Kırpma Dönüşümü** denir



Şekil.2.5.4.1

Şekil 2.5.4.1 den ;

$$\overrightarrow{HQ} = kd(P, L) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

ve

$$\overrightarrow{HP'} = \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{QP'}$$

$$\overrightarrow{HP'} = \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{HP}$$

$$P' = P + kd(P, L) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

veya

32 - Düzlemde Paralel ve Merkezci İzdüşümler-Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

$$K(P) = P + kd(P, L) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Eğer

$$L \dots ax + by + c = 0$$

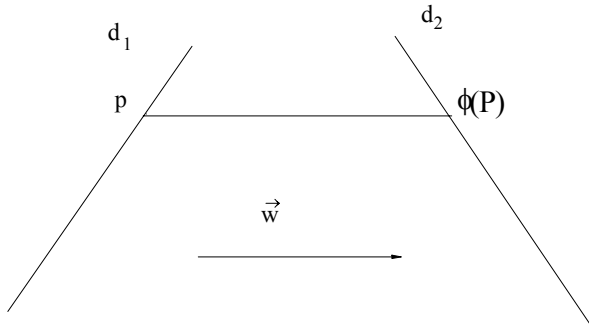
ise

$$K(x, y) = \left(x - \frac{bk(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, y + \frac{ak(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \right)$$

olur.

2.6.Düzlemde İzdüşümler

2.6.1.Bir Doğrunun Diğer Doğru Üzerine Paralel Ve Dik İzdüşümü



Şekil.2.6.1.1

Düzlemde

$$d_1 \dots ax + by + c = 0,$$

$$d_2 \dots a'x + b'y + c' = 0$$

doğruları ve $\vec{w}$ vektörü verilsin. d_1 doğrusunun normali $\vec{N} = (a, b)$ ve d_2

doğrusunun normali de $\vec{N}' = (a', b')$ olduğu açıktır. d_1 doğrusu üzerindeki

33 - Düzlemde Paralel ve Merkezci İzdüşümler-Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

P noktasından $\vec{w}$ vektörüne paralel çizip bu paralelin d_2 doğrusunu kestiği noktaya $\phi(P)$ diyelim Buna göre ;

$$\overrightarrow{P\phi(P)} = \lambda \vec{w}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını $\vec{N}'$ ile iç çarpıma tabi tutarak;

$$\langle \vec{w}, \vec{N}' \rangle \neq 0$$

olmak üzere;

$$\lambda = \frac{-(c' + \langle P, \vec{N}' \rangle)}{\langle \vec{w}, \vec{N}' \rangle}$$

ve

$$\phi(P) = P - \frac{(c' + \langle P, \vec{N}' \rangle)}{\langle \vec{w}, \vec{N}' \rangle} \vec{w}$$

bulunur. Gerekli hesaplamaları yaparak,

$$\phi(x, y) = \frac{(b'w_2x - b'w_1y - c'w_1, -a'w_2x + a'w_1y - c'w_2)}{a'w_1 + b'w_2}$$

dönüşümüne ulaşılır. Bu dönüşüme d_1 doğrusunun d_2 doğrusu üzerine

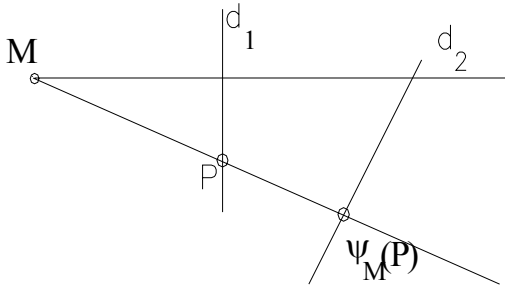
$\vec{w}$ **doğrultusundaki paralel izdüşümü** denir.

Eğer $\vec{w} = \vec{N}'$ ise

$$\phi(x, y) = \frac{(b'^2x - b'a'y - c'a', -a'b'x + a'^2y - c'b')}{a'^2 + b'^2}$$

dönüşümüne de d_1 doğrusunun d_2 doğrusu üzerine **dik izdüşümü** denir.

2.6.2.Düzlemde Merkezil İzdüşüm



Şekil 2.6.2.1

Düzlemde

$$d_1 \dots ax + by + c = 0,$$

$$d_2 \dots a'x + b'y + c' = 0$$

doğruları ve bu doğrular üzerinde bulunmayan M noktası verilsin. M noktasından geçen doğrunun d_1 doğrusunu kestiği nokta P ve d_2 doğrusunu kestiği nokta da $\Psi_M(P)$ olsun . Şekil 2.6.2.1 den

$$\overrightarrow{M\Psi_M(P)} = \lambda \overrightarrow{MP}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını d_2 doğrusunun $\vec{N}'$ normali ile iç çarpıma tabi tutarak;

$$\langle \overrightarrow{MP}, \vec{N}' \rangle \neq 0$$

olmak üzere;

$$\lambda = \frac{-\left(c' + \langle M, \vec{N}' \rangle\right)}{\langle \overrightarrow{MP}, \vec{N}' \rangle}$$

ve

$$\Psi_M(P) = M - \frac{(c' + \langle M, \vec{N}' \rangle)}{\langle \vec{MP}, \vec{N}' \rangle} \vec{MP}$$

bulunur. $M = (m_1, m_2)$ olmak üzere;

$$\Psi_M(P) = \left(\frac{-(c' + b'm_2)x + m_1b'y + c'm_1}{a'x + b'y - (a'm_1 + b'm_2)}, \frac{a'm_2x - (a'm_1 + c')y + c'm_2}{a'x + b'y - (a'm_1 + b'm_2)} \right)$$

bulunur. Bu dönüşüme d_1 doğrusunun d_2 doğrusu üzerine M **merkezli merkezci izdüşümü denir.**

d_1 doğrusunun normali $\vec{N} = (a, b)$ olmak üzere; bu dönüşüm altında görüntüsü bulunmayan

$$S = \left(\frac{-ab' + a'bm_1 + bb'm_2}{a'b - ab'}, \frac{a'b - aa'm_1 + ab'm_2}{a'b - ab'} \right)$$

noktasına **izdüşümün d_1 üzerindeki sıfır noktası** denir.

2.6.2.1. Merkezci İzdüşümün Özel Halleri

- M koordinat sisteminin orijini ise

$$\Psi_O(P) = \left(\frac{-c'x}{a'x + b'y}, \frac{-c'y}{a'x + b'y} \right),$$

- d_2 doğrusu X – eksenini ise

36 - Düzlemde Paralel ve Merkezci İzdüşümler-Düzlem Analitik Geometri-Baki Karlığa

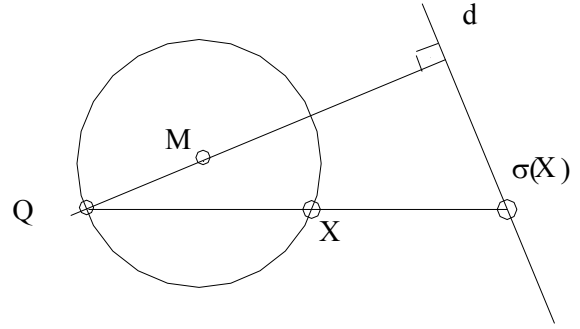
$$\Psi_M(P) = \left(\frac{-m_2x + m_1y}{y - m_2}, 0 \right),$$

- d_2 doğrusu Y – eksenine ise

$$\Psi_M(P) = \left(0, \frac{m_2x - m_1y}{x - m_1} \right)$$

olur.

2.6.3.Düzlemde Stereografik İzdüşüm Ve Özellikleri



Şekil.2.6.3.1

Düzlemde

$$d \dots ax + by + c = 0$$

doğrusu ve

$$\|\overrightarrow{MX}\| = r^2$$

çemberi verilsin. Çemberin M merkezinden d doğrusuna indirilen dikmenin çemberi kestiği nokta Q olsun. Q noktasından geçen herhangi doğrunun çemberi ve d doğrusunu kestiği noktalar sırasıyla $X, \sigma(X)$ olsun. Buna göre ; Şekil.2.6.3.1 den

$$\overrightarrow{MQ} = \lambda \vec{N} \quad , \quad r^2 = \|\overrightarrow{MQ}\|^2 = \lambda^2 \|\vec{N}\|^2$$

veya $\overrightarrow{MQ}$ vektörünün yönü $\vec{N}$ vektörünün yönü ile aynı ise

$$Q = M + \frac{r}{\|\vec{N}\|} \vec{N} \text{ dir.}$$

ters ise ; (yukarıdaki Q noktasının M noktasına göre simetriğinden)

$$Q = M - \frac{r}{\|\vec{N}\|} \vec{N}$$

olur.

Diğer taraftan

$$\overrightarrow{Q\sigma(X)} = \mu \overrightarrow{QX}$$

olduğundan

$$\sigma(X) = Q + \mu(X - Q)$$

olur. $\sigma(X)$, d üzerinde olduğundan

$$\mu = \frac{\langle Q, \vec{N} \rangle + c}{\langle Q, \vec{N} \rangle - \langle X, \vec{N} \rangle}$$

ve

$$\sigma(X) = Q + \frac{\langle Q, \vec{N} \rangle + c}{\langle Q, \vec{N} \rangle - \langle X, \vec{N} \rangle} (X - Q)$$

bulunur. Bu dönüşüme M merkezli r yarıçaplı çemberin d doğrusu üzerine stereografik izdüşümü denir.

Örnekler:

- $M = O, d \dots y = 0$ ise

$$\sigma : S^1 \rightarrow R$$

$$\sigma(x, y) = \frac{rx}{r-y}$$

dir.

- $M = O, d...x = 0$ ise

$$\sigma : S^1 \rightarrow R$$

$$\sigma(x, y) = \frac{ry}{r-x}$$

olur.

Bu örneklerle tanımlı stereografik izdüşümler 1-1 örten dönüşümler olduğundan tersleri vardır ve sırasıyla

-

$$\sigma^{-1} : R \rightarrow S^1$$

$$\sigma^{-1}(X) = \left(\frac{2X}{1+X^2}, \frac{r(X^2-1)}{1+X^2} \right)$$

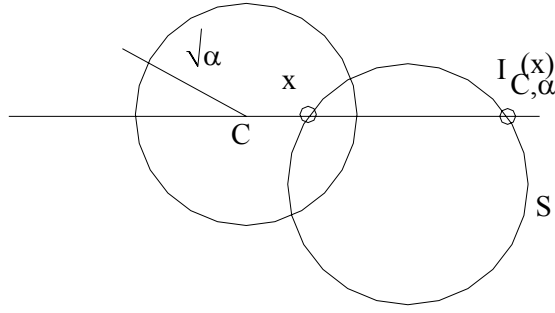
-

$$\sigma^{-1} : R \rightarrow S^1$$

$$\sigma^{-1}(X) = \left(\frac{r(X^2-1)}{1+X^2}, \frac{2X}{1+X^2} \right)$$

şeklindedir.

2.7.Düzlemde İncersiyon



Şekil.2.7.1

$$I_{C,r^2} : R^2 - \{C\} \rightarrow R^2 - \{C\}$$

$$I_{C,r^2}(P) = \frac{r^2}{\|\overrightarrow{CP}\|^2} \overrightarrow{CP}$$

dönüşümüne C kutuplu $\alpha = r^2$ kuvvetli incersiyon denir.

2.7.1.İncersiyonun Bazı Özellikleri

- $I_{C,r^2}^2 = I_{R^2 - \{C\}}$

$$I_{C,r^2} : R^2 - \{C\} \rightarrow R^2 - \{C\}$$

- $\left\| \overrightarrow{I_{C,r^2}(P) I_{C,r^2}(Q)} \right\| = \frac{r^2 \|\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{CP}\| \|\overrightarrow{CQ}\|}$

$$\bullet \quad I'_{C,r^2}(P)(\overrightarrow{CQ}) = \frac{r^2}{\|\overrightarrow{CP}\|^2} \left(\overrightarrow{CQ} - \frac{2\langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ} \rangle}{\|\overrightarrow{CP}\|^2} \overrightarrow{CP} \right),$$

burada I'_{C,r^2} incersiyon dönüşümünün Jakobianıdır.

- Şekil.2.7.1 den I'_{C,r^2} dönüşümüne ; C merkezli r yarıçaplı $S(C,r)$ çemberini değıştirmediginden $S(C,r)$ çemberine göre incersiyon da denir.

$$\bullet \quad \left\langle I'_{C,r^2}(P)(\overrightarrow{CQ}), I'_{C,r^2}(P)(\overrightarrow{CR}) \right\rangle = \frac{r^4}{\|\overrightarrow{CP}\|^4} \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CR} \rangle$$

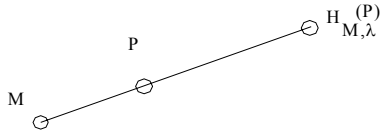
oldugundan **incersiyon açılı korur.**

2.8.Benzerlik Dönüşümleri

Düzlemin şekillerini koruyan dönüşümlerinin tümüne **Benzerlik Dönüşümü** denir. Düzlemin her benzerlik dönüşümü ; bir homoteti ile izometrinin bileşkesinden oluştuğundan ,burada aşağıdaki homoteti ve izometri tanımını vermek uygun olacaktır.

2.8.1.Homoteti Dönüşümü

Fotokopi makinasında büyültme küçültme yapan işlev bir homoteti dönüşümüdür.



$$H_{M,\lambda} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$H_{M,\lambda}(P) = M + \lambda(P - M)$$

şeklinde tanımlı dönüşüme M **merkezli** λ **oranlı Homoteti** denir.

2.8.1.1.Homotetinin Bazı Özellikleri

- Homoteti bir merkezcil izdüşüm çeşididir.
- $H_{M,\lambda} \circ H_{M,\mu} = H_{M,\lambda\mu}$

- Orijin merkezli a oranlı homoteti dönüşümünün homogen koordinatlardaki matrisi

$$H_a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Orijin merkezli a oranlı homoteti dönüşümü kutupsal koordinatlarda

$$H_a : R^2_{\rho\theta} \rightarrow R^2_{\rho\theta}$$

$$H_a(\rho, \theta) = (a\rho, \theta)$$

şeklinde tanımlanır.

- $I_{M,\alpha} \circ I_{M,\beta} = H_{M,\frac{\alpha}{\beta}}$

dır.

2.8.2.İzometri

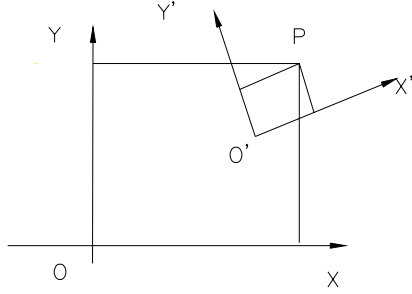
$$F : R^2 \rightarrow R^2$$

$$\langle F(P), F(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$$

özellikliğini sağlayan dönüşüme bir **izometri** denir.

İzometrilere ilerde göreceğimiz metrik dönüşümlerin özel hali olarak da göz önüne alınabilir.

3.Koordinat Sistemlerinin Değişimi



Şekil.3.1

Koordinat eksenlerini hareket ettirme ile koordinat eksenlerini sabit tutup ,nesneyi hareket ettirmek denklem üzerinde aynı etkiyi yaptığından koordinat sistemlerinin değişim formülleri bazı karışıklıklara yol açar. Örneğin ; okuduğumuz bir paragrafın altındaki paragrafı okumak için ya gözümüzü aşağıya doğru hareket ettiririz yada sayfayı yukarı doğru kaydırırız. Birincisinde koordinat sistemini hareket ettirmiş, ikincisinde ise nesneyi hareket ettirmiş oluruz.

Karışıklıkları önlemek için **Düzlemin Dönüşümlerini** ve **Koordinat Sistemlerinin Değişimini** birbirinden ayıracağız. Bir noktanın bir koordinat sistemine göre koordinatları ile aynı noktanın bir başka koordinat sistemine göre koordinatları arasındaki bağıntılara **"Koordinat sistemlerinin değişimi "** yada **" Bir koordinat sisteminden diğerine geçiş formülleri "** denir.

XOY koordinat sisteminden $X'OY'$ koordinat sistemine geçiş formülleri

$$\begin{cases} x = F_x(x', y') \\ y = F_y(x', y') \end{cases}$$
$$(x, y) = F(x', y')$$

şeklinde olur. Bunun amacı XOY koordinat sisteminde verilen bir nesnenin denkleminde x yerine $F_x(x', y')$ ve y yerine $F_y(x', y')$ yazılarak aynı nesnenin $X'OY'$ koordinat sistemindeki denklemini elde etmektir.

Örneğin; $X'OY'$ koordinat sistemi X – eksenini d birim uzunlukta kaydırarak XOY koordinat sisteminden elde edilmiş ise

$$F_x(x', y') = x', F_y(x', y') = y' + d$$

olur. Buna göre ;

XOY koordinat sisteminde denklemi

$$x^2 + y^2 = 1$$

olan çemberin $X'OY'$ koordinat sistemindeki denklemi

$$x'^2 + (y' + d)^2 = 1$$

şeklindedir. Bu nedenle ; XOY koordinat sisteminde kapalı denklem ile verilen bir nesnenin $X'OY'$ koordinat sistemindeki kapalı denklemi bu yolla hemen bulunur.

XOY koordinat sisteminde $P = (a, b)$ şeklinde verilen noktanın $X'OY'$ koordinat sistemindeki koordinatları

$$F_x(x', y') = a, F_y(x', y') = b$$

denklemlerinden x' ve y' çözülerek bulunur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi ;

$$x = F_x(x', y'), y = F_y(x', y')$$

denklemlerinden x' ve y' bulunabiliyorsa yani;

$$(x', y') = G(F(x', y')), (x, y) = F(G(x, y))$$

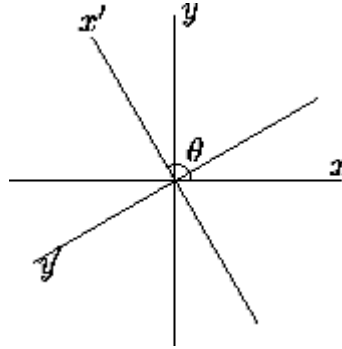
olacak şekilde bir G fonksiyonu bulunabiliyorsa,

$$\begin{cases} x' = G_{x'}(x, y) \\ y' = G_{y'}(x, y) \end{cases}$$
$$(x', y') = G(x, y)$$

formüllerine de $X'OY'$ koordinat sisteminden XOY koordinat sistemine **geçiş formülleri** denir.

3.1.Dönüşümleri Kullanarak Koordinat Sistemini Değiştirmek

Aynı tipten iki koordinat sistemi arasındaki değişim,dönüşümlerin denklemlerinden kolayca elde edilebilir. Bunu açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyelim.



Şekil.3.1 .1 Dönme ile Koordinatların Değişimi

$X'OY'$ koordinat sisteminde X' – ekseninin pozitif kısmının XOY koordinat sistemindeki X – ekseninin pozitif kısmını orijin etrafında pozitif yönde θ açısı kadar döndürerek elde edildiğini kabul edelim (**Şekil.3.1.1**).Eğer bir noktanın XOY koordinat sistemindeki koordinatları (x, y) ise $X'OY'$ koordinat sisteminde ki (x', y') koordinatları (x, y) koordinatlarının ters dönme altındaki görüntüsü ile aynıdır. Yani XOY koordinat sisteminden $X'OY'$ koordinat sistemine geçiş formülleri yukarıda gördüğümüz ters dönme dönüşümünden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$R_{\theta}^{-1}(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

eşitliğinin sağ tarafının (x', y') olduğunu kabul edip buradan x, y çekilerek geçiş formüllerinin

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

şeklinde olduğunu görürüz. XOY ve $X'OY'$ koordinat sistemlerinin rollerini değiştirerek yani;

XOY koordinat sistemindeki X – ekseninin pozitif kısmının $X'OY'$ koordinat sisteminin X' – ekseninin pozitif kısmının orijin etrafında pozitif yönde $-\theta$ açısı kadar döndürerek elde edildiğini kabul edip buna denk geçiş formüllerinin de

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\y' &= x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Bu son eşitliklere $X'OY'$ **koordinat sisteminden XOY koordinat sistemine geçiş formülleri** denir.

Yukarıdakine benzer şekilde XOY ve $X'OY'$ koordinat sistemlerinin bir öteleme ile birbirinden ayrıldığını kabul edelim. O zaman bir noktanın (x, y) , (x', y') koordinatları arasındaki bağıntılar;

$$\begin{aligned}x &= x' + x_0 & x' &= x - x_0 \\y &= y' + y_0 & y' &= y - y_0\end{aligned}$$

şeklinde olur.

3.2.Düzlemde Eğik Koordinatlarda Koordinat Sistemlerinin Değişimi

$$\left\{O, \vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}\right\}, \left\{O', \vec{e}'_1 = \overrightarrow{O'E'_1}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{O'E'_2}\right\}$$

dik koordinat sistemlerini alalım. Bir P noktasının birinci koordinat sistemine göre koordinatları (x, y) , ikinci koordinat sistemine göre koordinatlarının da (x', y') olduğunu kabul edelim. O', E'_1, E'_2 noktalarının birinci sisteme göre koordinatları sırasıyla; (x_0, y_0) , $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ olsun.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} ,$$

$$\overrightarrow{O'P} = x'\overrightarrow{O'E'_1} + y'\overrightarrow{O'E'_2}$$

olacağından,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + x'\overrightarrow{O'E'_1} + y'\overrightarrow{O'E'_2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + x'(\overrightarrow{OE'_1} - \overrightarrow{OO'}) + y'(\overrightarrow{OE'_2} - \overrightarrow{OO'})$$

ve koordinatlar cinsinden

$$(x, y) = (x_0, y_0) + x'((a_1, b_1) - (x_0, y_0)) + y'((a_2, b_2) - (x_0, y_0)) ,$$

$$x = x_0 + (a_1 - x_0)x' + (a_2 - x_0)y'$$

$$y = y_0 + (b_1 - y_0)x' + (b_2 - y_0)y'$$

veya matris gösterimi ile;

$$A = \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere ; $\{O, \vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}\}$ koordinat sisteminden

$\{O', \vec{e}'_1 = \overrightarrow{O'E'_1}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{O'E'_2}\}$ koordinat sistemine geçiş formülleri

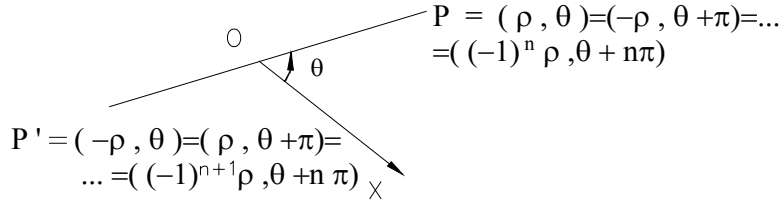
$$X = AX' + X_0$$

olur.

Burada ; A matrisinin ortogonal olması için gerek ve yeter şart

$\{O, \vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}\}, \{O', \vec{e}'_1 = \overrightarrow{O'E'_1}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{O'E'_2}\}$ koordinat sistemlerinin dik koordinat sistemleri olmasıdır.

4.Düzlemde Kutupsal Koordinatlar



Şekil 4.1

Düzlemde sabit O noktası ve bir $\langle OX$ ışını alalım. Düzlemin değişken bir noktası P olmak üzere $\langle OP$ ışınının sabit $\langle OX$ başlangıç ışını ile yaptığı pozitif yönlü açı $\theta(P)$ olsun. $\rho(P) = \|\overrightarrow{OP}\|$ olmak üzere eğer, $\theta(P)$ açısının bir kenarı $\langle OP$ ışını ise $\rho(P)$ pozitif, değilse negatif olarak alalım. Böylece düzlemin P noktasına bir $(\rho(P), \theta(P))$ reel sayı ikilisi karşılık tutmuş oluruz. Bu şekilde P noktasına karşılık tutulan reel sayı ikilileri tek değildir. Düzlemin her bir P noktasına $n \in \mathbb{Z}$ için

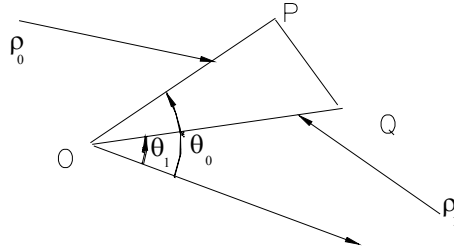
$$((-1)^n \rho(P), \theta(P) + n\pi)$$

gibi sonsuz tane reel sayı ikilisi karşılık gelir. $\rho(P) > 0$ ve daima

$\theta(P) \in [0, 2\pi)$ alınırsa O noktası hariç, düzlemin diğer herhangi noktasına bir tek $(\rho(P), \theta(P))$ reel sayı ikilisi karşılık gelir. O noktasına ise $(0, \theta(O))$

gibi sonsuz sayıda reel sayı ikilisi karşılık gelir. $\rho(P) > 0$ ve $\theta(P) \in [0, 2\pi)$ olmak üzere ; $\{O, \rho, \theta\}$ üçlüsüne düzlemin bir **kutupsal koordinat sistemi** , O noktasına **kutup noktası**, $(\rho(P), \theta(P))$ reel sayı ikilisine de P noktasının $\{O, \rho, \theta\}$ koordinat sistemine göre **kutupsal koordinatları** denir.

4.1.Kutupsal Koordinatlarda İki Nokta Arasındaki Uzaklık



Şekil 4.1.1

Kutupsal koordinatları $P = (\rho_0, \theta_0)$, $Q = (\rho_1, \theta_1)$ olan iki nokta

arasındaki uzaklık, Δ OPQ üçgenine cosinüs teoremi uygulanarak;

$$d(P, Q) = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\rho_0\rho_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)}$$

bulunur.

4.2.Kutupsal Koordinatlardan Kartezyen Koordinatlara Geçiş Formülleri

Bir kutupsal koordinat sisteminde kutup noktasında kutup eksenine dik bir Y – eksenini alarak kartezyen koordinat sistemi oluşturulursa ,kutupsal

koordinatları (ρ, θ) olan bir P noktasının bu şekilde seçilen kartezyen koordinat sistemine göre koordinatları

$$(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

veya

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

bulunur.

4.3.Kartezyen Koordinatlardan Kutupsal Koordinatlara Geçiş Formülleri

Kartezyen koordinat sisteminin orijinini kutup noktası , X – eksenini de kutup eksenini olarak alıp kutupsal koordinat sistemini oluşturalım.

Kartezyen koordinatları (x, y) olan P noktasının kutupsal koordinatları

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)$$

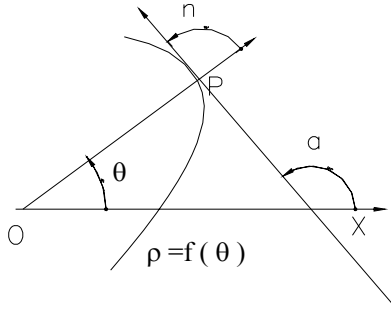
olur. Kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara geçiş formülleri de

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

olur.

4.4.Kutupsal Koordinatlarla Eğriler

4.4.1.Kutupsal Koordinatlarla Verilen Bir Eğrinin doğrultusu



Şekil.4.4.1

$\rho = f(\theta)$ denklemiyle verilen bir eğriyi göz önüne alalım.

Eğrinin değişken bir P noktasındaki teğet doğrusunu çizelim ve bu teğet üzerindeki pozitif yönü θ nın arttığı yön olarak alalım. Bu bir n ve bir de a açısı tanımlar. $\tan(n)$ eğrinin P noktasındaki doğrultusunu tanımlar.

$\tan(n)$ değeri biraz kartezyen koordinatlardaki eğime benzerdir. Şekil.4.4.1

den

$$\theta + n = a$$

$$n = a - \theta$$

$$\tan(n) = \frac{\tan(a) - \tan(\theta)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(\theta)}$$

P noktasının kartezyen koordinatları (x, y) ise

$$\tan(a) = \frac{dy}{dx}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad (4.4.1.1).$$

$$\tan(n) = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}$$

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

eşitliklerinden

$$dx = \cos \theta . d\rho - \rho \sin \theta . d\theta$$

$$dy = \sin \theta . d\rho + \rho \cos \theta . d\theta$$

bulunur. Bunları (4.4.1.1) eşitliğinde yerine yazarak;

$$\tan(n) = \frac{\rho^2 . d\theta}{\rho . d\rho} = \frac{\rho}{d\rho / d\theta}$$

$$\tan(n) = \frac{\rho}{\rho'}.$$

bulunur.

Böylece eğrinin her bir P noktasındaki doğrultusu

$$\tan(n) = \frac{\rho}{\rho'} \quad (4.4.1.2)$$

olur

4.4.2. Eşaçılı (İzogonal) Eğriler

Eğrinin her bir noktasında n doğrultusu sabit olacak şekildeki eğrilere **izogonal (eşaçılı) eğriler** denir.

Buna göre ; (4.4.1.2) eşitliğinden

$$\cot(n) = \frac{\rho'}{\rho} = (\ln(\rho))' = k$$

olduğunu kabul edelim.

1. $k = 0$ ise $\ln(\rho) = \text{sabit}$ ve buradan $\rho = \text{sabit}$ olacağından;

$$(\ln(\rho))' = 0$$

denklemleri eğriler , merkezleri kutup noktasında olan çemberler olur.

2. $k \neq 0$ ise

$$(\ln \rho)' = k$$

$$\frac{d \ln \rho}{d\theta} = k$$

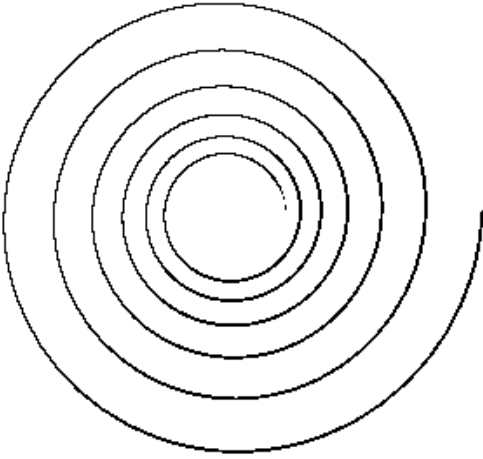
$$\ln \rho = k\theta + \text{sabit}$$

Eğer $\text{sabit} = \ln(m)$ alırsak

$$\ln \rho = k\theta + \ln(m)$$

$$\rho = me^{k\theta}$$

bulunur. Bu eğriler de ileride **10.6** bölümde inceleyeceğimiz, logaritmik (Bernoulli) spiralleridir.



Şekil.4.4.2.1.Logaritmik Spiral

4.4.3.Kutup Eksenine Paralel Teğet Doğruları

Şekil.4.4.1 den teğet doğrusunun kutupsal eksene paralel olması

$$\theta + n = k\pi$$

olmasını ve

$$\tan(\theta) = -\tan(n)$$

$$\tan(\theta) = -\frac{\rho}{\rho'}$$

olmasını gerektirir. Böylece bu trigonometrik denklemin her θ çözümü ,teğet doğrusu kutup eksenine paralel olan (ρ, θ) noktasını verir.

4.4.4.Kutup -Eksenine Dik Teğet Doğruları **Şekil.4.4.1 den**

n teğet doğrusunun kutupsal eksene dik olması,

$$\theta + n = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

olmasını ve

$$\tan(\theta) = \cot(n)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\rho'}{\rho}$$

olmasını gerektirir. Böylece bu trigonometrik denkleminin her θ çözümü , teğet doğrusu kutup eksenine dik olan (ρ, θ) noktasını verir.

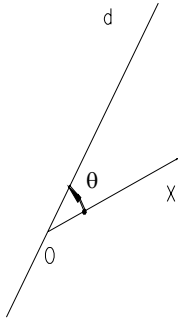
4.5.Kutupsal Denklemlerle Eğri Örnekleri

Aşağıda adresini vereceğimiz bir internet sitesinde kutupsal denklemlerle meşhur eğrilerin grafiklerini ,özelliklerini,tarihini bulabilirsiniz.

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Curves.html>

4.5.1.Kutupsal Koordinatlarda Doğru Denklemi

(a) Kutup noktasından geçen doğrunun denklemi



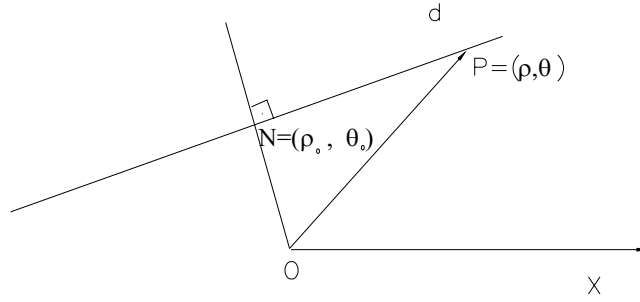
Şekil.4.5.1.1

Şekil.4.5.1.1 den de görüleceği gibi ;kutup noktasından geçen d doğrusu üzerindeki noktalar için kutupsal açı sabit olduğundan,,bu doğrunun denklemi $\theta = \text{sabit}$ şeklinde olur.

Örnek :

- $\theta = 0$ kutupsal eksendir
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ kutup noktasından geçen ve kutupsal eksene dik olan doğrunun kutupsal denklemidir.

(b) Kutup noktasından geçmeyen doğrunun denklemi



Şekil.4.5.1.2

Verilen bir d doğrusuna dik olan ve kutup noktasından geçen doğrunun d doğrusu ile arakesit noktası $N = (\rho_0, \theta_0)$ olsun. d doğrusu üzerinde bulunan değişken bir $P = (\rho, \theta)$ noktası için

$$\langle \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{ON} \rangle = 0$$

veya

$$\rho_0^2 - \rho \rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = 0$$

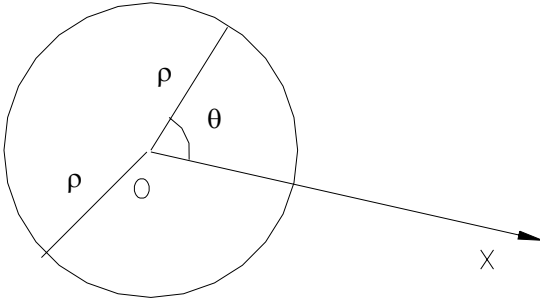
olur. ρ_0, θ_0 değerleri sıfırdan farklı olduğundan;

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

doğrunun kutupsal denklemi olur.

4.5.2.Kutupsal koordinatlarda Çember Denklemi

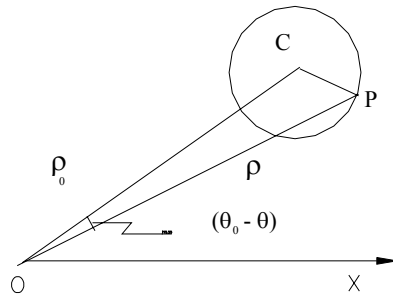
(a) Merkezi kutup noktasında ve yarıçapı R olan çemberin kutupsal denklemi



Şekil.4.5.2.1

Bu halde ; çember üzerindeki noktaların kutupsal uzunluğu sabit olacağından çemberin denklemi de $\rho = \text{sabit}$ şeklinde olacağı Şekil.4.5.2.1 den görülebilir.

(b) Merkezi kutup noktasında olmayan çemberin denklemi



Şekil.4.5.2.2

Şekil.4.5.2.2 den ; merkezi $C = (\rho_0, \theta_0)$ ve yarıçapı R olan çemberin denklemi, $P = (\rho, \theta)$ çember üzerindeki değişken nokta olmak üzere;

$$\|\overrightarrow{CP}\|^2 = R^2$$

eşitliğinden,

$$\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \rangle - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC} \rangle + \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \rangle = R^2$$

olur. Buradan;

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 = R^2$$

bulunur.

(c) Kutup Noktasından Geçen Çemberin Kutupsal Denklemi

Merkezi $(R, 0)$ ve yarıçapı R olan çemberin kutupsal denklemi yukarıdaki formülden $\rho_0 = R, \theta_0 = 0$ alarak

$$\rho = 2R \cos \theta$$

bulunur.

4.6.Kutupsal Koordinatlarda İç Çarpım

Düzlemin $(\rho_1, \theta_1), (\rho_2, \theta_2)$ koordinatlı noktalarının yer vektörleri $\vec{u}, \vec{v}$ olmak üzere; bu iki vektörün iç çarpımı

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

şeklinde tanımlanır.

4.7.Kutupsal Koordinatlarda Doğrudaşlık

Kutupsal koordinatlarda üç nokta $(\rho_0, \theta_0), (\rho_1, \theta_1), (\rho_2, \theta_2)$ olsun

Bu noktaları doğrudaş ise

$$\rho_1 \rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \rho_0 \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_0) + \rho_2 \rho_0 \sin(\theta_0 - \theta_2) = 0$$

olur.

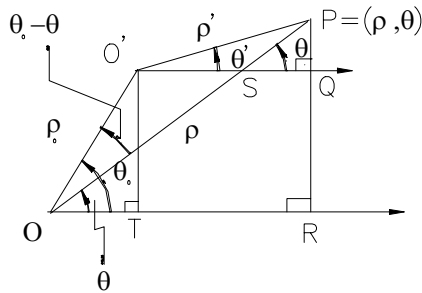
4.8.Kutupsal Koordinatlarda Bir Poligonun Alanı

Eğer tepe noktalarının kutupsal koordinatları $A_i = (\rho_i, \theta_i), i = 1, \dots, k$ ise poligonun alanı $\rho_{k+1} = \rho_1, \theta_{k+1} = \theta_1$ olmak üzere;

$$v(A_1, A_2, \dots, A_k) = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^k \rho_i \rho_{i+1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) \right|$$

şeklinde bulunur.

4.9.Kutupsal Koordinatlarda Kutup Noktasını Değiştirme Ve Öteleme



Şekil.4.9.1

$\{O, \rho, \theta\}$ kutupsal koordinat sistemini alalım. Eğer bu kutupsal koordinat sisteminin kutup ekseninin doğrultusunu ve yönünü

sabit tutup, O kutup noktasını $O' = (\rho_0, \theta_0)$ noktasına taşımak istersek; yeni $\{O', \rho', \theta'\}$ kutupsal koordinat sistemini elde ederiz. Bu yeni koordinat sistemine göre bir P noktasının kutupsal koordinatları (ρ', θ') ise

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\theta' = \arctan\left(\frac{\rho \cdot \sin(\theta) - \rho_0 \cdot \sin(\theta_0)}{\rho \cdot \cos(\theta) - \rho_0 \cdot \cos(\theta_0)}\right)$$

bulunur. Bu bağıntılara $\{O', \rho', \theta'\}$ koordinat sisteminden $\{O, \rho, \theta\}$ koordinat sistemine geçiş bağıntıları denir.

Gerçekten **Şekil.4.9.1** deki

$\triangle OO'T$ den

$$\|\vec{OT}\| = \rho_0 \cos \theta_0, \|\vec{QR}\| = \|\vec{O'T}\| = \rho_0 \sin \theta_0,$$

$\triangle OPR$ den

$$\|\vec{OR}\| = \rho \cdot \cos \theta, \|\vec{PR}\| = \rho \cdot \sin \theta$$

ve bu eşitliklerden de

$$\|\vec{TR}\| = \|\vec{OR}\| - \|\vec{OT}\| = \rho \cdot \cos \theta - \rho_0 \cdot \cos \theta_0$$

$$\|\vec{PQ}\| = \|\vec{PR}\| - \|\vec{QR}\| = \rho \cdot \sin \theta - \rho_0 \cdot \sin \theta_0$$

olur.

$\triangle PO'Q$ den de

$$\tan \theta' = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{O'Q}\|} = \frac{\rho \cdot \sin \theta - \rho_0 \cdot \sin \theta_0}{\rho \cdot \cos \theta - \rho_0 \cdot \cos \theta_0}$$

bulunur. Kosinüs teoreminden

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

olacağı da açıktır. Benzer şekilde ; $\{O, \rho, \theta\}$ koordinat sisteminden

$\{O', \rho', \theta'\}$ koordinat sistemine geçiş bağıntıları da

$$\rho = \sqrt{\rho'^2 + \rho_0^2 + 2\rho'\rho_0 \cdot \cos(\theta' - \theta_0)}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\rho' \cdot \sin(\theta') + \rho_0 \cdot \sin(\theta_0)}{\rho' \cdot \cos(\theta') + \rho_0 \cdot \cos(\theta_0)}\right)$$

olarak bulunur.

4.10.Kutupsal Koordinatlarda Yansıma

4.10.1.Kutupsal Koordinatlarda Bir Doğruya Göre Yansıma

Bir d doğrusuna göre yansımanın kutupsal koordinatlardaki ifadesini bulalım. d doğrusunun denklemi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho_0} = \frac{\cos \theta_0}{\rho_0} \cdot \cos \theta + \frac{\sin \theta_0}{\rho_0} \cdot \sin \theta$$

şeklinde ise kutup noktasını $N = (\rho_0, \theta_0)$ noktasına ötelerek

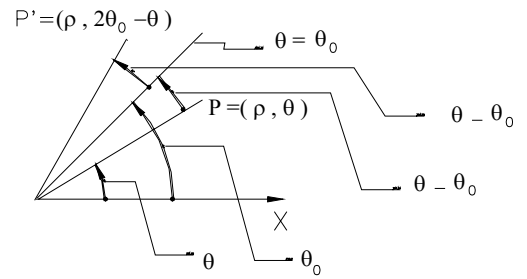
yani;

$$\rho = \sqrt{\rho'^2 + \rho_0^2 + 2\rho'\rho_0 \cdot \cos(\theta' - \theta_0)}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\rho' \cdot \sin(\theta') + \rho_0 \cdot \sin(\theta_0)}{\rho' \cdot \cos(\theta') + \rho_0 \cdot \cos(\theta_0)}\right)$$

alırsak $\{O', \rho', \theta'\}$ kutupsal koordinat sisteminde doğrunun denklemi $\theta' = \theta_0$ olur. O halde kutup noktasından geçmeyen bir doğruyu kutup noktasından geçecek şekilde yeni kutupsal koordinatlar seçebiliriz. Bu nedenle ;sadece kutup noktasından geçen doğruya göre yansımanın kutupsal koordinatlardaki ifadesini bulmak yeterlidir.

4.10.2.Kutup Noktasından Geçen Doğruya Göre Yansıma



Şekil.4.10.2.1

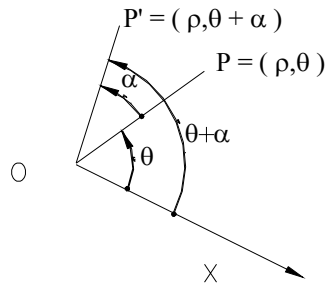
Kutup noktasından geçen doğru $\theta = \theta_0$ olsun. O zaman

Şekil.4.10.2.1 den,

$$S_{\theta_0}(\theta) = 2\theta_0 - \theta$$

dır.

4.11.Kutupsal Koordinatlarda Kutup Noktası Etrafında Dönme



Şekil.4.11.1

Dönme dönüşümleri altında uzunluklar değişmediğinden , α açısı kadar kutup noktası etrafında dönme dönüşümü;

$$R_{\alpha}(\rho, \theta) = (\rho, \theta + \alpha)$$

şeklinde tanımlı olur.

5.Düzlemde Homogen Koordinatlara Giriş

5.1.Homogen Koordinatların Kullanım Modelleri

Doğruları , noktaları, arakesitleri ve eğrilerin denklemleri ile ilgili bütün formülleri elde etmek için soyut görüşleri ele almalıyız.

Çeşitli mantıklar açısından homogen koordinatlar faydalı olup, bunların en önemlilerinden birisi , bu koordinatların düzlemin bütün simetrilerinin , bir tek şemsiye altında birleştirilmesine müsaade etmesidir.

Homogen koordinatlar dik koordinatların kullanıldığı Öklid geometrisinin dışında başka geometrilerin kurulmasında da kullanılır. Öklid geometrisinin kurulmasında dik izdüşümün kullanıldığını biliyoruz. Leonardo De Vinci nin "Bir nesnenin nasıl görüldüğü değil , gözlemcinin onu nasıl gördüğünü göz önüne almak gerekir" düşüncesinden ortaya çıkmış olan ve merkezci izdüşüm kullanılarak kurulan projektif geometri de bu koordinat sistemi kullanıldığından , homogen koordinatlara bazen projektif koordinatlar da denir. Örneğin ; bir gözlemci, düz bir alanda paralel olarak gerilmiş uzun demir yolunun raylarının ufukta bir yerde birleşeceğini görür. Bu nedenle de her hareket ve düşüncesini buna göre ayarlar. De Vinci bu düşüncüyü üç boyutlu bir manzarayı iki boyutlu görüntü olarak nasıl planlarınız düşüncesine uyarladı. Göz retinamızın eğrildiğini , lensimizin ışığı

engellediğini , beyin işlemcimizin ne gördüğümüze büyük etki ettiğini hesaba katmazsak ,bu model yalnızca bir yaklaşımdan ibaret olsa da, hem resim hem matematiksel olarak ilginçtir. Projektif geometrinin kurulmasında kullanılan ve daha önce verdiğimiz merkezci izdüşümün üç değişik hali vardır :

Bunlardan birincisi ; film projektörü ile yapılan izdüşüm modelidir. Bu modeli ;tanım düzlemindeki her bir kaynak noktayı ,tanım düzleminde görüntü düzlemindeki noktaya itmek şeklinde algılayabiliriz.

İkinci model ise, bir ressamın gördüğü manzarayı önündeki beze çekme modeli olup,birincisinde kaynak gözlemci ile görüntü arasında olmasına rağmen bu modelde , görüntü kaynak ile gözlemci arasındadır. Üçüncü modelde de gözlemci kaynak ile görüntü arasındadır.

Bu izdüşümlerin geometrik etkilerinden bazılarını tanımlamak için;gözlemcinin koordinat sisteminin orijinine konulduğunu ve üstünün de cam yarı-küre ile kapatıldığını düşünelim. Gözlemcinin cam küreden baktığı doğrultudaki her nesne - gözlemciyle cam küre arasındaki noktalar da dahil olmak üzere-gözlemciye cam küre üzerinde tek bir nokta olarak gözüktür. Gözlemcinin görüş doğrultusu $\vec{v} \neq 0$ ise, projektif düzlemdeki v noktasını $\vec{v} \neq 0$ vektörüne paralel olan ve orijinden geçen

$$\{\lambda.\vec{v} | \lambda \neq 0, \lambda \in R\}$$

doğrusu olarak tanımlarız. Eğer gözlemci aşağıya bakarsa , baktığı doğrultu gözlemcinin arkasındaki diğer bir projektif noktayı verecektir. Yani gözlemci kubbenin altından itibaren görüş doğrultusunu seçerse ;ekvatora

gelineceye kadar projektif nokta, bu görüş doğrultusuyla ters yönde ,ekvatoru geçince aynı yönde olur.

Projektif düzlem için başka model de ,merkezi orijinde olan küre modelidir. Orijinden geçen doğrular küreyi iki farklı noktada keser ki bu noktalara kürenin zıt(antipotal) noktaları denir. O halde ; orijinden geçen bir doğru ile projektif düzlemdeki bir noktayı belirlersek ,bu iki nokta ile de belirleyebiliriz. Projektif noktanın iki zıt(antipotal) nokta ile belirtilmesinin sonucu olarak; iki zıt(antipotal) nokta çifti aldığımızda ,bu noktalardan geçen bir tek büyük çember vardır. Bu büyük çember zıt(antipotal) nokta çiftinin belirttiği düzlem ile kürenin arakesit eğrisi olarak göz önüne alınabileceğinden ,bu zıt(antipotal) noktalardan geçen düzlem verildiğinde çember bellidir. Bu nedenle;bu iki projektif noktadan geçen projektif doğru olarak bu düzlemi ve projektif doğrunun denklemi olarak ta bu düzlemin denklemini alabiliriz. Bu düzlemler orijinden geçtiklerinden denklemleri sadece normal vektörlerine bağlıdır. Yani bu düzlemleri normal vektörleriyle temsil edebiliriz.

Örneğin ;

$$x + y - z = 0$$

düzlemini

$$d = \{\lambda(1,1,-1) \mid \lambda \neq 0, \lambda \in R\} = [1,1,-1]$$

şeklinde projektif doğru olarak alabiliriz. Böylece genel olarak bir projektif doğru

$$\overline{N} = (a,b,c) \in R^3 - \{(0,0,0)\}$$

olmak üzere ,

$$d = \left\{ \lambda \vec{N} = \lambda(a, b, c) \mid \lambda \neq 0, \lambda \in R \right\} = [a, b, c]$$

şeklinde belirtilir.

Bir projektif V noktasının verilen bir d projektif doğrusu üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{v}, \vec{N} \rangle = 0$ olmasıdır.

Yukarıdaki önermeden de görüleceği gibi projektif analitik geometrinin Öklidyen analitik geometriden bir tek farkı , herhangi bir noktanın denkleminin var olmasıdır. Öklidyen geometride düzlemdeki herhangi iki doğru ya paralel ya da kesişir. Küre üzerindeki iki büyük çember bir tek zıt(antipotal) nokta çiftinde kesişeceğinden projektif iki doğru mutlaka bir projektif noktada kesişir. Bu nedenle projektif geometri , Öklidyen geometriden daha basit ve düzgün geometridir.

Öklidyen ve projektif geometrilerden birbirine geçiş için R^3 de projektif düzlemin küre modelini birim küre olarak, Öklidyen düzlemi de $z = 1$ düzlemi olarak alalım. Bu seçim bize projektif noktaları Öklidyen noktalara indirgeme kolaylığı sağlar. Çünkü; düzlem üzerindeki bütün noktalar küre üzerindeki zıt(antipotal) noktaların orijin merkezli merkezci izdüşümüdür. Kürenin ekvatoru üzerindeki zıt(antipotal) noktalar , düzlem üzerindeki bir noktaya iz düşürülemezler. Bu noktalar sonsuza iz düşürülürler. Bu nedenle; projektif düzlemin Öklidyen düzleme bazı noktalar ilave ederek oluşturulacağını düşünüp, Öklidyen düzlemin projektif düzleme gömüldüğünü söyleyebiliriz. Kürenin ekvatoru üzerindeki zıt(antipotal) nokta çiftlerine , projektif düzlemin ideal noktaları ya da

sonsuzdaki noktaları denir. Ekvatorun belirlediği büyük çembere de projektif düzlemin ideal veya sonsuzdaki doğrusu denir.

Kürenin ekvatoru üzerindeki zıt(antipotal) nokta çiftinde kesişen büyük çemberlerin düzlem üzerindeki izdüşümleri paralel olmayan Öklidyen doğrulardır.

5.2.Bir Noktanın Homogen Koordinatları

R^3 de $\approx$ bağıntısını

$$(x_1, x_2, x_3) \approx (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3), \lambda \neq 0$$

şeklinde tanımlayalım. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. $\approx$ bağıntısını her bir denklik sınıfı da

$$[(x_1, x_2, x_3)] = \{(y_1, y_2, y_3) | (y_1, y_2, y_3) = \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3), \lambda \neq 0\}$$

şeklinde olacaktır. $x_3 \neq 0$ olacak şekildeki $[(x_1, x_2, x_3)]$ denklik sınıfına

;düzlemin $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ koordinatlı noktası karşılık gelir. Bu özellikteki

noktalara düzlemin **sonlu noktaları** denir.

Tersine düzlemin her (x, y) koordinatlı noktasına bir $[(x, y, 1)]$ denklik sınıfı karşılık gelir.

$\approx$ bağıntısının $x_3 = 0$ olacak şekilde yani, $[(x_1, x_2, 0)]$ şeklinde de denklik sınıfları vardır. Şimdi bu özellikteki denklik sınıflarını irdeleyelim.

5.2.1.Düzlemin Sonsuzdaki Noktaları

Düzlemin $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü

$\vec{v} = (a, b)$ olan doğrusu d olsun. O zaman

" P_0 noktasından farklı bir P noktasının d doğrusu üzerinde

olması için gerek ve yeter şart $x = x_0 + r.a, y = y_0 + r.b$ olacak şekilde bir r reel sayısının varolmasıdır." ifadesini söyleyebiliriz.

$r \neq 0$ olmak üzere bu özellikteki P noktasının homogen koordinatları

$$[(x_0 + r.a, y_0 + r.b, 1)]$$

veya

$$\left[\left(\frac{x_0}{r} + a, \frac{y_0}{r} + b, \frac{1}{r} \right) \right]$$

denklik sınıfının karşılık geleceğini biliyoruz. Eğer r reel sayısı sonsuz büyürse P noktası, d doğrusu boyunca tanımsız hale dönüşür ve $[(a, b, 0)]$ denklik sınıfına yaklaşır. Fakat $[(a, b, 0)]$ denklik sınıfı, düzlemin sonlu noktasının homogen koordinatları değildir. O halde bu bağıntının denklik sınıfları ile düzlemin sonlu noktaları bire-bir eşlenemez. Bu eşlemeyi yapabilmek için düzleme adına sonsuz nokta diyeceğimiz ilave bir nokta eklememiz gerekir. $[(a, b, 0)]$ denklik sınıfına karşılık gelen bu noktaya **düzlemin d doğrusu üzerindeki sonsuzdaki (ideal) noktası** denir. $[(a, b, 0)]$ denklik sınıfı, $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasından bağımsız olduğundan bu denklik sınıfına karşılık gelen noktaya **düzlemin $\vec{v} = (a, b)$ doğrultulu sonsuzdaki(ideal) noktası** da denir. Buradan; bütün paralel doğruların aynı ideal noktaya sahip olduğunu görürüz. Tersine aynı ideal noktaya sahip olan doğrular paraleldirler. Diğer bir deyişle bütün paralel doğrular aynı bir ideal noktada kesişirler.

Örnekler

- Doğrultman vektörü (a, b) olan doğrunun sonsuzdaki noktasının homogen koordinatları $[(a, b, 0)]$ dır.
- Buna göre X – eksenı üzerindeki sonsuzdaki noktanın homogen koordinatları $[(1, 0, 0)]$ dır.

- Y – eksen üzerindeki sonsuzdaki noktanın homogen koordinatları $[(0,1,0)]$ dır.
- Eğimi m olan herhangi bir doğru üzerindeki sonsuzdaki noktanın homogen koordinatları $[(1,m,0)]$ olur.
- $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun sonsuzdaki noktasının homogen koordinatları $[(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)]$ olur.
 $ax + by + c = 0$ denklemlili doğrunun sonsuzdaki noktasının homogen koordinatları $[(b, -a, 0)]$ bulunur.

6.Afin ve Projektif Düzlem

6.1.Projektif Noktalar

Bütün sonlu noktaların kümesine **afin düzlem** , sonlu ve sonsuzdaki bütün noktaların oluşturduğu kümeye **tamamlanmış afin düzlem** denir. Bir noktanın sonlu yada sonsuz olmasıyla ilgilenmiyorsak ; bu noktaların oluşturduğu kümeye **projektif düzlem** ve bu düzlemin herhangi noktasına da **projektif nokta** denir. Yani projektif nokta sonlu yada sonsuz nokta olabilir.

6.2.Bölme Oranı -Bir Doğru Üzerinde Diğer Bir Parametre

P_1, P_2 bir d doğrusu üzerinde iki nokta ve P de P_2 den farklı bir nokta olsun.

P noktası d doğrusu üzerindedir $\Leftrightarrow \overrightarrow{PP_1} = k\overrightarrow{PP_2}$ olacak şekilde bir k sayısı vardır.

Buradaki k sayısına P_1, P_2 **nokta çiftine göre** P **noktasının bölme oranı** denir ve $k = (P_1, P_2, P)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca

$$k = \frac{\|\overrightarrow{PP_1}\|}{\|\overrightarrow{PP_2}\|} = (P_1, P_2, P)$$

olduğunu da belirtelim.

Doğru üzerindeki P_2 noktasının bölme oranının sonsuz olduğunu kabul edeceğiz.

6.2.1.Bölme Oranı ve Kartezyen Koordinatlar

P_1, P_2 bir d doğrusu üzerinde iki nokta ve P de P_2 den farklı bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} P, (P_1, P_2, P) = k \text{ özellikli } d \text{ doğrusu üzerindedir} &\Leftrightarrow \overrightarrow{PP_1} = k\overrightarrow{PP_2} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP} = k(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP_1} - k\overrightarrow{OP_2}}{1 - k} \\ P &= \left(\frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \frac{y_1 - ky_2}{1 - k} \right) \end{aligned}$$

Buradan doğrunun P değişken noktasının homogen koordinatları

$$\left[\left(\frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}, 1 \right) \right]$$

veya

$$[(x_1 - kx_2, y_1 - ky_2, 1 - k)]$$

olur.

k değiştiğinde P noktası da d doğrusunu oluşturur.

6.2.2.Bir Doğrunun Sonsuzdaki Noktasının Bölme Oranı

6.2.1.kesimden doğrunun P değişken noktasının homogen koordinatları, $(P_1, P_2, P) = k$ olmak üzere ; $[(x_1 - kx_2, y_1 - ky_2, 1 - k)]$ olduğunu biliyoruz. $k = 1$ için $[(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 0)]$ ve $[(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 0)]$

d doğrusunun sonsuzdaki noktası olduğundan , $k = 1$ değerine d doğrusunun sonsuzdaki noktasının bölme oranı denir.

6.3.Düzlemde Bir Doğrunun Homogen Denklemi

Düzlemde dik koordinatlardaki denklemi

$$u.x + v.y + w = 0$$

olan bir d doğrusunu göz önüne alalım.

- P noktası d doğrusunun sonlu noktasıdır $\Leftrightarrow$ homogen koordinatlarda

$$P = [(X, Y, Z)], Z \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ dik koordinatlarda

$$P = \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right)$$

- P , d doğrusunun sonsuzdaki noktasıdır $\Leftrightarrow$ homogen koordinatlarda

$$P = [(X, Y, Z)], Z = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{V} = (x, y), \text{ vektörü}$$

$$ux + vy = 0 \text{ doğrusunun}$$

doğrultman vektörüdür

. $\Leftrightarrow$

$$uX + vY + wZ = 0$$

$$Z = 0$$

Bu iki halden ,herhangi P noktası için ;

P , d doğrusu üzerindedir. $\Leftrightarrow uX + vY + wZ = 0$.

O halde d doğrusunun homogen denkleminin $uX + vY + wZ = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu denklemin sıfırdan farklı her reel sayı ile çarpımı da bu doğrunun denklemdir.

6.3.1.Sonlu Doğru ve Sonsuzdaki Doğru

$P = [(X, Y, Z)]$ noktası sonsuzdaki noktadır $\Leftrightarrow Z = 0$

$$\Leftrightarrow 0.X + 0.Y + 1.Z = 0$$

Herhangi sonsuzdaki P noktası $Z = 0$ denklemlili eğriye aittir.

Bu denklemin $uX + vY + wZ = 0$ şekline sahip olması nedeniyle, $Z = 0$ sonsuzdaki doğrunun denklemdir. Diğer bütün doğrular sonlu doğrulardır.

Eğer doğruların sonlu olup olmadığını ayırt etmezsek bütün doğrulara projektif doğrular diyebiliriz. Projektif doğru dediğimizde , doğrunun sonlu veya sonsuz olması arasında bir fark gözetmeyeceğiz.

6.4.Doğrusal Koordinatlar

Düzlemde

$$d \dots uX + vY + wZ = 0$$

$$d' \dots u'X + v'Y + w'Z = 0$$

gibi herhangi iki doğru için

$$d \approx d' \Leftrightarrow (u', v', w') = \lambda(u, v, w)$$

şeklinde tanımlı bağıntı denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının her bir denklik sınıfı da

$$[u, v, w] = \{d' | d' \approx d\}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$uX + vY + wZ = 0$$

denklemleri her bir doğruya , bir tek $[u, v, w]$ kümesi karşılık gelir.

Bu kümenin her bir elemanına d doğrusunun doğrusal koordinatları denir. Böylece herhangi

$$u.x + v.y + w = 0$$

doğrusunun homogen koordinatları ,

$$[u, v, w] = \{(u', v', w') \mid (u', v', w') = \lambda(u, v, w), \lambda \neq 0\}$$

olur.

Örnek:

$$5x + 3y - 4 = 0$$

doğrusunun homogen koordinatları

$$[5, 3, -4]$$

olur.

6.4.1. Doğrular ve Noktalar Arasında Dualite

Bir doğrunun denkleminin $uX + vY + wZ = 0$ olması için gerek ve yeter şart $P = [(X, Y, Z)]$ noktasının $[u, v, w]$ doğrusu üzerinde olmasıdır.

Bir noktanın denkleminin

$$uX + vY + wZ = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $[u, v, w]$ doğrusunun $P = [(X, Y, Z)]$ noktasını kapsamasıdır.

Bu benzerliğe noktalar ve doğrular arasındaki **dualite** denir.

6.5. Projektif Düzlemde Formüller Ve Özellikler

Bu kesimde çeşitli özellikleri kullanarak ,doğruların arakesit noktaları ve doğruların homogen denklemleri için özel formüller elde edeceğiz. Projektif düzlemde çalıştığımızdan ,noktalar sonlu da sonsuz da olabilirler. Bunlar arasında bir ayrım yapmayacağız. Bu nedenle de bu bölümde bütün noktaları projektif noktalar olarak alacağız.

6.5.1. Projektif Düzlemde Üç Projektif Noktanın Doğrudaşlığı

$$P_1 = [(X_1, Y_1, Z_1)], P_2 = [(X_2, Y_2, Z_2)], P_3 = [(X_3, Y_3, Z_3)]$$

projektif noktalar olsun.

$$P_1 = [(X_1, Y_1, Z_1)], P_2 = [(X_2, Y_2, Z_2)], P_3 = [(X_3, Y_3, Z_3)]$$

noktaları aynı doğru üzerindedir $\Leftrightarrow$

$$P_1 = [(X_1, Y_1, Z_1)], P_2 = [(X_2, Y_2, Z_2)], P_3 = [(X_3, Y_3, Z_3)] \text{ noktaları}$$

$uX + vY + wZ = 0$ doğrusu üzerinde olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan u, v, w reel sayıları vardır.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 = 0 \end{cases}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan u, v, w reel sayıları vardır

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 = 0 \end{cases}$$

Homogen denklem sisteminin $(0,0,0)$ dan farklı çözümü vardır

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Bu üç noktanın aynı doğru üzerinde bulunması (doğrudaşlık) için gerekli ve yeterli şarttır.

6.5.2. Projektif Düzlemde Üç Projektif Doğrunun Noktadaşlığı

$$d_1 = [u_1, v_1, w], d_2 = [u_2, v_2, w_2], d_3 = [u_3, v_3, w_3]$$

noktadaş üç projektif doğru olsun. Yani; bu doğruların sonlu yada sonsuz olması önemli olmasın .

$d_1 = [u_1, v_1, w], d_2 = [u_2, v_2, w_2], d_3 = [u_3, v_3, w_3]$ doğruları ortak noktaya sahiptir $\Leftrightarrow$ Bu üç doğru üzerinde bulunan bir $P = [(X, Y, Z)]$ noktası vardır.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \\ u_3x + v_3y + w_3z = 0 \end{cases}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan (X, Y, Z) reel sayı üçlüsü vardır.

$$\begin{aligned} u_1 X + v_1 Y + w_1 Z &= 0 \\ \Leftrightarrow u_2 X + v_2 Y + w_2 Z &= 0 \\ u_3 X + v_3 Y + w_3 Z &= 0 \end{aligned}$$

homogen denklem sistemi $(0,0,0)$ dan farklı bir çözüme sahiptir.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

6.5.3. Projektif Düzlemde İki Projektif Noktası Verilen

Projektif Doğrunun Denklemi

$$P_1 = [(X_1, Y_1, Z_1)], P_2 = [(X_2, Y_2, Z_2)]$$

gibi sonlu yada sonsuz iki noktadan geçen doğrunun denklemi,

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

ile bellidir.

6.5.4. Projektif Düzlemde Bir Projektif Doğrunun Değişken Noktası

$$P_1 = [(X_1, Y_1, Z_1)], P_2 = [(X_2, Y_2, Z_2)] \text{ gibi sonlu yada sonsuz iki}$$

noktadan geçen doğru d olsun.

$$P = [(X, Y, Z)] \text{ noktası } d \text{ doğrusu üzerinde} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır.

P_1, P_2 iki farklı nokta olduğundan bunlardan biri diğeri cinsinden yazılamazlar,

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan,

bu determinantın üçüncü satırı diğer iki satırın lineer birleşimidir.

O halde , $(X, Y, Z) = k(X_1, Y_1, Z_1) + l(X_2, Y_2, Z_2)$ olacak şekilde

ikisi aynı anda sıfır olmayan k, l sayıları vardır. Bu nedenle $P = [(X, Y, Z)]$

değişken noktasının koordinatları

$$P = [(kx_1 + lx_2, ky_1 + ly_2, kz_1 + lz_2)]$$

bulunur. Buradaki k, l sayılarına d doğrusunun **homogen parametreleri** denir.

$k = 0$ için $P = P_2$. Eğer $P \neq P_2$ ise $k \neq 0$ olacağından $P = [(X, Y, Z)]$

değişken noktasının homogen koordinatları $\left[\left(x_1 + \frac{l}{k} x_2, y_1 + \frac{l}{k} y_2, z_1 + \frac{l}{k} z_2 \right) \right]$

$$\frac{l}{k} = h \text{ olarak}$$

$$P = [(x_1 + hx_2, y_1 + hy_2, z_1 + hz_2)]$$

şeklinde buluruz. Buradaki h parametresine **homogen olmayan parametre** denir.

Böylece iki noktası verilen bir doğrunun homogen parametrelere ve homogen olmayan parametreye bağlı denklemlerinin verileceğini görmüş olduk.

6.5.5. Projektif Düzlemde İki Farklı Doğru ile Tanımlanan Değişken Doğru

$$d_1 = [u_1, v_1, w], d_2 = [u_2, v_2, w_2], d = [u, v, w]$$

projektif doğrular olsun.

$$d_1, d_2, d \text{ doğruları noktadaştır} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \text{ olmasıdır.}$$

$d_1 \neq d_2$ olduğundan (u_2, v_2, w_2) üçlüsü (u_1, v_1, w_1) cinsinden yazılamaz. Bu nedenle;

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \text{ eşitliğinin sağ yanındaki determinantın üçüncü satırı ilk iki}$$

satırın lineer birleşimi olmalıdır. Buna göre;

$$(u, v, w) = k(u_1, v_1, w_1) + l(u_2, v_2, w_2)$$

olacak şekilde ikisi aynı anda sıfır olmayan k, l sayıları vardır.

Böylece d_1, d_2 doğrularının arakesit noktasından geçen değişken doğrunun homogen koordinatları

$$[u, v, w] = [ku_1 + lu_2, kv_1 + lv_2, kw_1 + lw_2]$$

olur. Buradaki k, l sayılarına değişken **doğrunun homogen parametreleri** denir.

Değişken doğrunun homogen denklemi de

$$(ku_1 + lu_2)X + (kv_1 + lv_2)Y + (kw_1 + lw_2)Z = 0$$

veya

$$k(u_1X + v_1Y + w_1Z) + l(u_2X + v_2Y + w_2Z) = 0$$

olur. Eğer d_1 doğrusunun homogen denklemini $A = 0$ ve d_2 doğrusunun homogen denklemini de $B = 0$ olarak alırsak, d **doğrusunun homogen denklemi** de;

$$kA + lB = 0$$

olur.

$kA + lB = 0$ denkleminde eğer $k = 0$ ise $d = d_2$. Eğer $d \neq d_2$

ise $k \neq 0$ ve k ya bölerek, $A + \frac{l}{k}B = 0$ veya $h = \frac{l}{k}$ alarak, $A + hB = 0$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme d **değişken doğrusunun homogen olmayan denklemi** denir. h ya da d **nin homogen olmayan parametresi** denir.

Örnek: d' doğrusunun homogen denklemi

$$X - Y + 2Z = 0$$

d'' doğrusunun homogen denklemi de

$$d'' \quad 2X - Y + 3Z = 0$$

ise

d'' den farklı d' , d'' doğrularının arakesit noktasından geçen değişken d doğrusunun homogen parametrelere bağlı denklemi

$$k(X - Y + 2Z) + l(2X - Y + 3Z) = 0$$

ve homogen olmayan parametreye bağlı denklemi de

$$(X - Y + 2Z) + h(2X - Y + 3Z) = 0$$

olur.

6.5.6.İki Farklı Doğru ile Belirlenen Arakesit Noktası

$$d_1 \dots u_1 X + v_1 Y + w_1 Z = 0$$

$$d_2 \dots u_2 X + v_2 Y + w_2 Z = 0$$

projektif doğrular olsun. Bu doğruların arakesit noktalarının homogen koordinatları

$$\begin{cases} u_1 X + v_1 Y + w_1 Z = 0 \\ u_2 X + v_2 Y + w_2 Z = 0 \end{cases}$$

homogen denklem sisteminin bir çözümüdür.

$d_1 \neq d_2$ olduğundan (u_2, v_2, w_2) üçlüsü (u_1, v_1, w_1) cinsinden yazılamaz. Bu nedenle;

$$\begin{cases} u_1 X + v_1 Y + w_1 Z = 0 \\ u_2 X + v_2 Y + w_2 Z = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı iki olduğundan çözümü tek parametreye bağlıdır. Buna göre ;

$$\begin{cases} u_1 X + v_1 Y = -w_1 Z \\ u_2 X + v_2 Y = -w_2 Z \end{cases}$$

almak genelliği bozmaz. Bu denklem sistemini Cramer kuralına göre çözersek ;

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -w_1 Z & v_1 \\ -w_2 Z & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}, Y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & -w_1 Z \\ u_2 & -w_2 Z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}$$

veya

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -w_1 & v_1 \\ -w_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} Z, Y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & -w_1 \\ u_2 & -w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} Z$$

olur.

Z nin her seçilişi için bir çözüm elde edileceğinden

$Z = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$ için de bir çözüm elde ederiz. O zaman bu iki doğrunun arakesit

noktasının homogen koordinatları

$$X = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, Y = -\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}, Z = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

veya

$$\left[\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \right]$$

olur.

Örnek: d', d'' doğrularının homogen denklemi sırasıyla ;

$$X - Y + 2Z = 0,$$

$$2X - Y + 3Z = 0$$

ise

d', d'' doğrularının arakesit noktasının koordinatları.

$$\left[\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \right] \quad \text{veya } [-1, 1, 1] \text{ bulunur.}$$

7.Düzlemde Homogen Koordinatlar ve Homogen Koordinat Sistemlerinin Değişimi

7.1.Bir Düzlemsel Eğrinin Homogen Denklemi

Düzlemdeki bir noktanın kartezyen koordinatlarla verilmiş eğri üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart bu noktanın kartezyen koordinatlarının eğri denklemini sağlamasıdır.

Homogen koordinatlar için böyle bir şartı aşağıdaki şekilde vereceğiz.

$$F(x, y) = 0$$

Verilen bir eğrinin kartezyen koordinatlardaki denklemi olsun.

P sonlu nokta ve P nin homogen koordinatları (X, Y, Z) ise

$$P \text{ eğri üzerindedir} \Leftrightarrow G(X, Y, Z) = F\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0.$$

Eğer P sonsuzdaki nokta ise sonsuzdaki noktanın tanımından ve eğrinin Homogen koordinatlardaki denklemi

$$\lambda \neq 0, \lambda G(X, Y, Z) = 0.$$

olmak üzere ;

$$P \text{ eğri üzerindedir} \Leftrightarrow G(X, Y, Z) = 0.$$

Örnek: Kartezyen koordinatlardaki denklemi

$$F(x, y) = y^2 - 2px = 0$$

olan eğrinin homogen koordinatlardaki denklemi

$$G(X, Y, Z) = Y^2 - 2PXZ = 0$$

$[(1,0,0)]$ noktası bu son denklemi sağladığından bu eğrinin sonsuzdaki noktasıdır.

7.2.Homogen Koordinat Sistemlerinin Değişimi

XYZ eski koordinat sistemi $X'Y'Z'$ de yeni koordinat sistemi olsun.

Bu homogen koordinat sistemleri $Z = Z'$ olacak şekilde seçilebilir.

- P noktasının eski ve yeni koordinat sistemlerine göre koordinatları sırasıyla $[(X,Y,Z)]$, $[(X',Y',Z')]$ ve P noktası sonlu nokta olsun. Bu durumda ;

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z} \text{ ve } x' = \frac{X'}{Z'}, y' = \frac{Y'}{Z'}$$

olur.

$\{O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\}$ koordinat sisteminden koordinat $\{O', \overrightarrow{O'E'_1}, \overrightarrow{O'E'_2}\}$ sistemine

geçiş formüllerini göz önüne alalım ; O', E_1, E_2 noktalarının

$\{O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\}$ koordinat sistemine göre koordinatları sırasıyla ;

$$(x_0, y_0), (a_1 - x_0, b_1 - y_0), (a_2 - x_0, b_2 - y_0)$$

ise

$$x = x_0 + (a_1 - x_0)x' + (a_2 - x_0)y'$$

$$y = y_0 + (b_1 - y_0)x' + (b_2 - y_0)y'$$

olacağını afin koordinat sistemlerinin değişiminden biliyoruz.

Buradan ;

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 - x_0) & (a_2 - x_0) \\ (b_1 - y_0) & (b_2 - y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Z' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 - x_0) & (a_2 - x_0) & x_0 \\ (b_1 - y_0) & (b_2 - y_0) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Z' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

ya da

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 - x_0) & (a_2 - x_0) & x_0 \\ (b_1 - y_0) & (b_2 - y_0) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$M = \begin{bmatrix} (a_1 - x_0) & (a_2 - x_0) & x_0 \\ (b_1 - y_0) & (b_2 - y_0) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.1)$$

matrisine XYZ koordinat sisteminden $X'Y'Z'$ koordinat sistemine geçiş matrisi denir.

- P sonsuzdaki nokta ise aynı formüllerin yine geçerli olduğu gösterilebilir.

7.3.Homogen Koordinatlarda Koordinat Sisteminin Ötelenmesi

(7.2.1) eşitliğinin $E_1 = E'_1, E_2 = E'_2$ olan özel halinin homogen koordinatlarda , koordinat sisteminin ötelenmesine karşılık gelmesinden;

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

7.4.Homogen Koordinatlarda Bir Dik Koordinat Sisteminin Döndürülmesi

(7.2.1) eşitliğinin $x_0 = y_0 = 0$ ve

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin ortogonal olması özel haline, koordinat sisteminin döndürülmesi karşılık geldiğinden;

$$a_1 = \cos t, a_2 = -\sin t, b_1 = \sin t, b_2 = \cos t,$$

alınarak

$$M = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

7.5.Homogen Koordinatlarda Bir Doğru İçin Dönüşüm Formülü

Düzlemin iki homogen koordinat sistemini XYZ , $X'Y'Z'$ ile belirtelim. Bir doğrunun XYZ koordinat sistemindeki denklemi ,

$$uX + vY + wZ = 0$$

ise bu denklemi matris çarpımı şeklinde

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitlik değişken bir noktanın homogen koordinatlarda doğru üzerinde bulunma şartıdır. XYZ koordinat sisteminden $X'Y'Z'$ koordinat sistemine geçiş formüllerinden

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} u' & v' & w' \end{bmatrix}$$

olmak üzere ; doğrunun denklemi

$$u'X' + v'Y' + w'Z' = 0$$

şeklindedir.

Böylece doğrunun XYZ , $X'Y'Z'$ koordinat sistemlerindeki denklemleri sırasıyla; $[u, v, w]$, $[u', v', w']$ olur. O halde

$$[u \quad v \quad w]M = [u' \quad v' \quad w']$$

de doğrunun bu koordinat değişimi altındaki dönüşümüdür.

8.Homogen Koordinatlarda Dönüşümler

8.1.Projektif, Afin ve Metrik Dönüşümler

Koordinat sisteminde düşünmeksizin projektif düzlemin bütün noktalarını alabiliriz. Homogen koordinatların teorisinden, noktalar ve $\{[(X, Y, Z)] | (X, Y, Z) \in R^3 - \{0\}\}$.

kümesi arasında bire-bir eşleme vardır. Şimdi bu denklik sınıflarının bir keyfi lineer permütasyonunu göz önüne alıp, bunlara karşılık gelen noktaların yerlerini kendi aralarında değiştirelim. O zaman bütün noktalar yeni koordinatlara sahip olurlar. Böyle bir lineer permütasyona koordinatların projektif dönüşümü denir.

Bu dönüşüm formüllerinin

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabileceği gösterilebilir.

Buradaki dönüşüm matrisi regülerdir ve $(X, Y, Z), P = [(X, Y, Z)]$ noktasının eski koordinatı, (X', Y', Z') de yeni koordinatıdır. Bu tip dönüşümler en genel projektif dönüşümlerdir. Bu tip bütün dönüşümlerin kümesini alırsak, bu küme içinde $Z = 0$ özelliğini değiştirmeyen dönüşümlere **afin dönüşümler** denir. Bu özel halde $[(X, Y, 0)]$ homogen koordinatlı sonsuzdaki noktaların yeni koordinatları da aynı özellikli olarak

alınır. Bu noktalar afin düzlemin ideal noktalarıdır.

Bu dönüşüm formülleri

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer bütün afin dönüşümlerin kümesini göz önüne alırsak bunların iki nokta arasındaki uzaklığı değiştirmeyenlerine de **metrik dönüşümler** denir.

Her bir metrik dönüşümün ;sonlu sayıdaki öteleme ,dönme ,orijinden geçen bir doğruya göre yansımanın bileşkesi olduğu gösterilebilir. Metrik dönüşümler kümesi , afin dönüşümler kümesinin bir alt kümesidir. Afin dönüşümler kümesi de projektif dönüşümler kümesinin alt kümesidir.

Yukarıdan da anlaşılacağı gibi doğruları ve doğruların paralelliğini koruyan dönüşüme bir afin dönüşüm denir. Bu dönüşümlerin iki önemli özel hali vardır.

- **Merkezi orijinde olan oransal olmayan (homoteti olmayan) gösterge dönüşümü**

$$g : R^2 \rightarrow R^2, a \neq 0 \neq b$$

$$g(x, y) = (ax, by)$$

buradaki a, b değerlerine **gösterge çarpanları** denir.

- Bu dönüşümün homogen koordinatlardaki matrisi

$$H_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

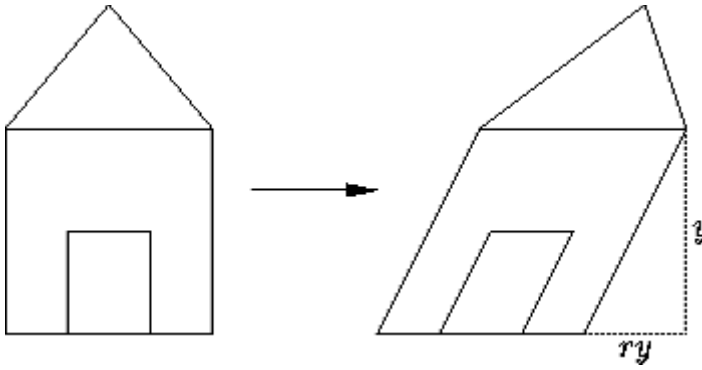
- **Yatay doğruları koruyan kırpma dönüşümü**

$$K_r(x, y) = (x + ry, y)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm olup ,buradaki r değerine de **kırpma çarpanı** denir.

Bu dönüşümün homogen koordinatlardaki matrisi

$$K_r = \begin{bmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil.8.1 : $r = \frac{1}{2}$ çarpanlı kırpma

Her afin dönüşüm ; bir izometri ile bir gösterge dönüşümünün veya bir kırpma ile homoteti ve bir izometrinin bileşkesinden elde edilir.

8.2.Homogen Koordinatlarda Simetri Formülleri

Düzlemin bütün izometrilere , homogen koordinatlarda bir matris çarpımı ile ifade edilebilir. Bu düşünce özellikle bilgisayar uygulamaları yaparken faydalıdır. Örneğin ; dönüşümlerin ardışık uygulamasında ,dönüşümlerin ardışık bileşkesini almak işlemi , bu dönüşümlerin homogen koordinatlardaki ifadelerine karşılık gelen matrislerin çarpılmasına dönüşür. Bu dönüşümlerin homogen koordinatlardaki ifadelerine karşılık gelen matrisler aşağıdaki gibidir :

- $\vec{\gamma} = (x_0, y_0)$ kadar öteleme

$$T_{(x_0, y_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- θ açısı kadar orijin etrafında dönme

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- X – eksenine θ açısı yapan ve orijinden geçen bir doğruya göre yansıma

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bunlardan diğer bütün dönüşümler için sonuç çıkarabiliriz. Örneğin; keyfi

$P = (x_0, y_0)$ noktası etrafında α açısı kadar dönmeyi bulmak için önce

$T_{-(x_0, y_0)}$ ötelemesi uygulayarak, P noktasını orijine öteler, daha sonra α açısı

kadar orijin etrafında dönme ve son olarak ta $T_{(x_0, y_0)}$ ötelemesi

uygulanarak

$$T_{(x_x, y_0)} R_{\alpha} T_{-(x_x, y_0)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 - x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 - y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

8.3.Noktaların Dönüşümleri

Düzlemde sabit bir koordinat sistemi seçersek,

düzlemin her bir noktası bu koordinat sisteminde sabit koordinat üçlüsüne sahip olur.

Şimdi M tersinir 3×3 tipinden matris olmak üzere formülleri

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

şeklinde alırsak; bu koordinatlar arasında bir eşleme tanımlar ve bu nedenle de, düzlemin noktaları arasında da bir eşleme belirler.

8.4.Geometrik Özelliklerin Sınıflandırılması

8.4.1.Projektif Özellikler

Yukarıdaki M matrisinin sağlaması gereken tek şart , regüler olmasıdır. Bu nedenle; burada düzlemin noktalarının en genel lineer permütasyonları söz konusudur. Genelde ; sonsuzdaki noktalar sonlu noktalara dönüştürülür. Bütün bu permütasyonların kümesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grubun dönüşümleri altında değişmeyen kavram ve özelliklere **projektif özellikler** denir. Bu kavram ve özelliklerin çalışılmasına da **Projektif Geometri** denir. Projektif özellikler noktaların doğrudaşlığı ,doğruların noktadaşlığı gibi özellikler olup, projektif olmayan özellikler de Paralellik ,Sonsuzdaki Nokta ,Uzaklık,Vektör gibi özelliklerdir.

8.4.2.Afin Özellikler

Eğer M matrisi regüler ve

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ise sonsuzdaki noktaları sonsuzdaki noktalara dönüştürür. Bu özellikteki bütün permütasyonların kümesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grubun bütün dönüşümleri altında değişmeyen kavram ve özelliklere **afin özellikler** denir.

Bu kavram ve özelliklerin çalışıldığı geometriye de **Afin Geometri** denir. Afin özellikler ;**Noktaların Doğrudaşlığı ,Paralellik,Sonsuzdaki Nokta, Doğruların Noktadaşlığı ,Vektör, Orta Nokta** gibi özelliklerdir.

Afin olmayan özellikler de **Uzaklık, Norm, Ortogonallik** gibi özelliklerdir.

8.4.3. Metrik Özellikler

Eğer M matrisi iki sonlu nokta arasındaki uzaklığı koruyan regüler matris ise M ye, metrik dönüşümün matrisi denir. Böyle bütün dönüşümlerin kümesi bileşke işlemine göre grup oluşturur. Bu grubun bütün dönüşümleri altında değişmeyen kavram ve özelliklere metrik özellikler denir. Bu kavram ve özelliklerin çalışıldığı alana da **Metrik Geometri** denir.

Metrik özellikler ; **Noktaların Doğrudaşlığı , Paralellik, Sonsuzdaki Nokta , Doğruların Noktadaşlığı , Vektör, Orta Nokta , Uzaklık, Norm, Ortogonallik** gibi özelliklerdir.

Projektif özellikler , afin özelliklerin alt kümesi ve Afin özellikler de Metrik özelliklerin alt kümesidir

8.5.Geometrilerin Sınıflandırılması

8.5.1.Metrik geometri

Bir problemde yalnızca metrik özellikler varken çözümü metrik geometriyi kullanarak yaparız. Bu durumda problemin çözümünün metrik düzlemde yapıldığını söyleriz. Sonuç metrik eksenlerin seçilişinden bağımsızdır. Burada metrik eksenlerden kastımız ; düzlemdeki bir ortonormal bazdır. Bu durumda $(0,0,1)$ ve $(1,0,1)$ noktaları keyfi olarak seçilebilir. Bu noktalar ile birlikte koordinat sistemi tamamen belirlenir.

8.5.2Afin Geometri

Bir problemde sadece afin özellikler varsa problemi afin geometriyi kullanarak çözeriz. Bu durumda problemin afin düzlemde çözüldüğü söylenir. Çözüm afin eksenlerden bağımsızdır. Afin eksenlerden kastımız ; düzlemdeki herhangi bazdır. Bu durumda aynı doğru üzerinde olmayan $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ ve $(0,1,1)$ noktaları keyfi olarak seçilebilir. Bu noktalarla birlikte koordinat sistemi tamamen belirlenir.

8.5.3.Projektif Geometri

Bir problemde sadece projektif özellikler varsa ;problemin çözümünü projektif geometriyi kullanarak yaparız. Çözümün de projektif düzlemde yapıldığı söylenir. Çözüm projektif eksenlerden bağımsızdır. Projektif eksenlerden kastımız ; ilk üçü aynı doğru üzerinde olmayan $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ ve $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ gibi dört nokta seçilebilmesidir. Bu noktalar taban üçgeninin taban noktalarıdır. Bu nedenle taban üçgeninin kenarları üzerinde

bulunmayan keyfi bir nokta seçebiliriz Örneğin ; (1,1,1) birim noktasını seçebiliriz .Bu noktalarla birlikte koordinat sistemi tamamen belirlenir. Eksenleri uygun seçerek pek çok problemin çözümü kolaylaştırılabilir. Bunların tümü örneksiz olarak anlamsız gibi görünmektedir.

Şimdi dört projektif teorem ,üç afin teorem örneği vereceğiz.

9.Örnekler

9.1.Projektif Teorem Örnekleri

9.1.1.Noktadaş Doğrular için Ceva Teoremi

Bir ABC üçgeni a,b,c doğruları tarafından belirlenmiş olsun.

l_1 doğrusu a,b den farklı ve C den geçen doğru ,

l_2 doğrusu b,c den farklı ve A dan geçen doğru ve

l_3 doğrusu da c,a dan farklı ve B den geçen doğru olsun.

Şimdi l_1, l_2, l_3 doğrularının noktadaş olup olmadığını araştıracağız.

Çözümün kolay olması için A noktasını $[(1,0,0)]$, B noktasını $[(0,1,0)]$ ve C noktasını da $[(0,0,1)]$ olarak alacağız.

Bu durumda a doğrusunun denklemi $X = 0$, b doğrusunun denklemi $Y = 0$ c doğrusunun denklemi de $Z = 0$ olur.

C den geçen değişken l_1 doğrusunun denklemi $X + kY = 0$

A ’dan geçen değişken l_2 doğrusunun denklemi $Y + lZ = 0$

ve B den geçen değişken l_3 doğrusunun denklemi de $Z + mX = 0$ dır.

Burada k, l, m homojen olmayan parametrelerdir.

$$\begin{aligned} l_1, l_2, l_3 \text{ doğruları noktadaştır} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & l \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + klm = 0 \\ &\Leftrightarrow klm = -1 \end{aligned}$$

Bu sonuç koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır ve noktadaş doğrular için **Ceva Teoremi** olarak bilinir.

9.1.2.Noktadaş Doğrular için Menelaus Teoremi

Bir ABC üçgeni ve AB kenarı üzerinde L_1 , BC kenarı üzerinde L_2 , CA kenarı üzerinde L_3 noktaları verilsin. L_1, L_2, L_3 noktaları üçgenin tepe noktaları değilse, L_1, L_2, L_3 noktalarının doğruduş olma şartlarını araştıracağız

Çözümü basitçe elde edebilmek için, $A = [(1,0,0)]$, $B = [(0,1,0)]$, $C = [(0,0,1)]$ seçelim.

O zaman; $L_1 = [(1,k,0)]$, $L_2 = [(0,1,l)]$, $L_3 = [(m,0,1)]$ olur.

$$\begin{aligned} L_1, L_2, L_3 \text{ noktaları doğruduş} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & l \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + klm = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow klm = -1$$

Bu sonuç koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır ve doğrudan noktalar için **Menelaus Teoremi** olarak bilinir.

9.1.3.Pappus-Pascal Teoremi

d_1, d_2 iki doğru, d_1 üzerinde farklı üç nokta A_1, A_3, A_5 ve A_2, A_4, A_6 da d_2 üzerinde farklı üç nokta olsun. A_1A_2, A_4A_5 doğrularının arakesit noktası P , A_2A_3, A_5A_6 doğrularının arakesit noktası Q , A_3A_4, A_6A_1 doğrularının arakesit noktası da R olsun. O zaman; P, Q, R doğrudur.

İspat:

d_1, d_2 nin arakesit noktasını S ile belirtelim.

$$S = [(1,0,0)], A_4 = [(0,1,0)], A_1 = [(0,0,1)]$$

seçersek; d_1 doğrusunun denklemi $Y = 0$, d_2 doğrusunun denklemi $Z = 0$ ve

$$A_5 = [(1,0,l)], A_3 = [(1,0,l')], A_2 = [(1,m,0)], A_6 = [(1,m',0)]$$

$$A_1A_2 \dots mX - Y = 0$$

$$A_4A_5 \dots lX - Z$$

$$P = [(1,m,l)]$$

$$A_1A_6 \dots m'X - Y = 0$$

$$A_3A_4 \dots l'X - Z$$

$$R = [(1,m',l')]$$

$$A_5A_6 \dots -l.m'X + lY + m'Z = 0$$

$$A_2A_3 \dots -l'mX + l'Y + mZ = 0$$

$$Q = [(lm - l'm', lmm' - l'mm', ll'm - ll'm')]$$

ve bunlara bağlı olarak;

$$\begin{vmatrix} 1 & m & l \\ 1 & m' & l' \\ lm - l'm' & lmm' - l'mm' & ll'm - ll'm' \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan P, Q, R doğrudur. PQR doğrusuna **Pascal Doğrusu** denir.

9.1.4. Dezag Teoremi

İki üçgenin karşılıklı tepe noktalarının üç çifti ile tanımlı doğrular noktadaş ise üçgenin karşılıklı kenarlarının üç çifti de noktadaştır.

İspat: $A = [(1,0,0)], B = [(0,1,0)], C = [0,0,1], S = [(1,1,1)]$

seçelim. O zaman SA doğrusu üzerinde $A' = [(1+l,1,1)]$ SB doğrusu

üzerinde $B' = [(1,1+m,1)]$, SC doğrusu üzerinde $C' = [(1,1,1+n)]$ olur.

$BC, B'C'$ doğrularının arakesit noktası K olmak üzere ; BC doğrusunun

denklemini $X = 0$ ve bu nedenle de K nın birinci koordinatı 0 olur. K

noktası $B'C'$ doğrusu üzerinde bulunduğundan; $K, B' = [(1,1+m,1)]$

$C' = [(1,1,1+n)]$ noktalarının lineer kombinasyonudur. Birinci koordinat 0

olduğundan $K = [(0, m, -n)]$ olur.

Benzer şekilde ; $L = [(l, 0, -n)], M = [(l, -m, 0)]$ bulunur.

$$\begin{vmatrix} 0 & m & -n \\ l & 0 & -n \\ l & -m & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ olduğundan } K, L, M \text{ doğrudur.}$$

9.2.Afin Teorem  rnekleri

9.2.1.Afin Düzlemde Menelaus Teoremi

Bir ABC  çgeni ve AB kenarı üzerinde L_1 , BC kenarı üzerinde L_2 , CA kenarı üzerinde L_3 noktaları verilsin. L_1, L_2, L_3 noktaları üçgenin tepe noktaları değilse

$$L_1, L_2, L_3 \text{ doğrudaş} \Rightarrow (A, B, L_1)(B, C, L_2)(C, A, L_3) = 1.$$

İspat: Bu problemde sadece afin kavram olduğundan afin geometri kullanılarak problemin c z m  yapılır. Bu nedenle ; afin koordinat sistemini

$$A = [(0,0,1)], B = [(1,0,1)], C = [(0,1,1)] \text{ seçebiliriz.}$$

$$(A, B, L_1) = k, (B, C, L_2) = l, (C, A, L_3) = m$$

O zaman;

$$L_1 = [(-k, 0, 1-k)], L_2 = [(1, -l, 1-l)], L_3 = [(0, 1, 1-m)]$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} L_1, L_2, L_3 \text{ noktaları doğrudaş} &\Rightarrow \begin{vmatrix} -k & 0 & 1-k \\ 1 & -l & 1-l \\ 0 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow 1 - klm = 0 \\ &\Rightarrow klm = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

9.2.2.Afin Düzlemde Ceva Teoremi

a, b, c üç noktadaş olmayan doğrular olsun. l_1 doğrusu a, b nin arakesit noktası olan C den geçen ve c yi L_1 noktasında l_2 doğrusu b, c nin arakesit noktası olan A dan geçen doğru ve a yi L_2 noktasında l_3 doğrusu da c, a nin arakesit noktası olan B den geçen ve b doğrusunu L_3 noktasında kesen doğru olsun. Bu durumda

l_1, l_2, l_3 doğruları a, b, c doğrularıyla çakışmıyorsa ;

l_1, l_2, l_3 doğruları noktadaştır $\Rightarrow (A, B, L_1)(B, C, L_2)(C, A, L_3) = -1$.

İspat :

Bu problemde sadece afin özellikler olduğundan afin geometri kullanılarak problemin çözümü yapılır. Bu nedenle de afin koordinat sistemini

$A = [(0,0,1)] B = [(1,0,1)] C = [(0,1,1)]$ seçebiliriz

$(A, B, L_1) = k, (B, C, L_2) = l, (C, A, L_3) = m$

O zaman;

$L_1 = [(-k, 0, 1 - k)] L_2 = [(1, -l, 1 - l)] L_3 = [(0, 1, 1 - m)]$

olur. l_1, l_2, l_3 doğrularının homogen koordinatlarını hesaplarsak

$l_1 \dots [1 - k, -k, k]$

$l_2 \dots [l, 1, 0]$

$l_3 \dots [-1, m - 1, 1]$

bulunur. Buradan ;

$$l_1, l_2, l_3 \text{ doğruları noktadaştır} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-k & -k & k \\ l & 1 & 0 \\ -1 & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow klm = -1$$

bulunur.

9.2.3. Bir Üçgende Noktadaş Doğrular

Bir ABC üçgeninin BC kenarına ; B' , AB üzerinde ve C' , AC üzerinde olacak şekilde $B'C'$ paraleli çizelim. A dan BC' ve $B'C$ doğrularının orta noktalarına çizilen doğrular noktadaştır.

İspat : A dan çizilen orta nokta doğrusu BC doğrusunu bir A' noktasında kestiğini kabul edelim. $B'C'$, BC ye paralel olduğundan

$$\frac{B'A}{B'B} = \frac{C'A}{C'C}$$

$$\frac{B'A}{B'B} \cdot \frac{C'C}{C'A} = 1$$

$$\Rightarrow (A, B, B')(C, A, C') = 1 .$$

Diğer taraftan,

AA' orta nokta doğrusu olduğundan ;

$$\frac{A'B}{A'C} = -1 \Rightarrow (B, C, A') = -1$$

olur.

Her iki sonuçtan $(A, B, B')(B, C, A')(C, A, C') = -1$

$$(ABB')(BCA')(CAC') = -1$$

ve Ceva teoreminden AA', BC', CB' doğruları noktadaştır.

10.Düzlemsel Eğriler Teorisine Giriş

Eğrilerin pek çok sınıflandırılma yolları vardır. Birincisi $F(x, y) = 0$ şeklinde sol yanı polinom olan denklemin grafiğinden yola çıkarak yapılan sınıflandırmadır. Sonrada tanımlanacağı gibi polinom denkleminin grafiğine cebirsel eğri denir. Eğrilerin cebirsel olup olmadığını araştırmak ileri düzeyde çalışma gerektirir. Eğriler cebirsel olmasalar da belli özellikleri kullanılarak kolayca çizilebilirler. Örneğin; sikloid ,eşaçılı sipiral gibi eğrilerin özellikleri kullanılarak kolayca çizildikleri halde , bu eğriler hiçbir polinom denkleminin grafiği değildirler yani ; cebirsel değildirler.

Biz burada eğrileri çizim metotlarına göre gruplayacağız. Adına fraktal(dallandırılmış) ve uzay dolduran eğriler denilen özel eğri sınıfları da vardır. Bu tip eğriler konu olarak çok ilginçtir , fakat bunları , analitik geometrinin konuları arasında vermeyi uygun bulmadık.

10.1.Eğrilerin Sınıflandırılması

Eğrilerin sınıflandırılmasını aşağıda kapsamlı olmayan bir liste ile örnekleyeceğiz.

(i) Kişi İsimlerine Göre Sınıflandırma:

Hippias quadratrix, Nicomedes Konkoidi, Kappa Eğrisi, Pascal Kolu(limasonu), Bernoulli Kurdelası (Lemniskatı), Agnesi Büyüsü, Descartes yaprağı, Descartes Parabolü, Catalan Trisectrix, Tschirnhausen Kübiği, Cayley Sextiği, Freeth Nefroidi, Euler Sipirali, Cornu Sipirali, Durer Konkoidi,Bowditch Eğrisi gibi.

Genel olarak eğrilere iliştirilen bu isimler bu eğrileri keşfeden yada bu konuda çalışan kişiler değildir.

(ii) Bir Eğriden Yararlanarak Türetim Metoduna Göre Sınıflandırma :

Bir eğrinin Kaustik Eğrisi, Bir eğrinin Türev Eğrisi, Bir eğrinin İntegral Eğrisi , Bir eğrinin İzoptik Eğrisi, Bir eğrinin Ortoptik Eğrisi , Bir eğriye Paralel Eğri, Bir eğrinin Pedal Eğrisi,Bir eğrinin Radyal Eğrisi,Bir eğrinin Zarf Eğrisi,Bir eğrinin Evolüt Eğrisi,Bir eğrinin İnvolut Eğrisi ,Bir

eğrinin Kissioid Eğrisi , Bir eğrinin Konkoid Eğrisi, Eğrilerin Kaymadan Yuvarlanma Eğrileri, İki eğri üzerinde kayan bir doğru üzerindeki bir noktanın çizdiği eğri(Kayma Eğrileri) , Eğrilerin Kayış Eğrisi,Eğrilerin Takip eğrisi gibi.

(iii) Eğrilerin Özelliklerine Göre Sınıflandırması :

trisectrix, quadratrix, brachistochrone (aka cycloid), tautochrone (aka cycloid),isochrone (aka semi-cubic parabola), anallagmatic eğri

(iv) Eğrilerin Şekillerine Göre Sınıflandırma :

Astroid (yıldız), Deltoid (Delta Eğrisi) (tricuspid, Steiner hyposikloidi),Kardioid (Kalp Eğrisi), Nicomedes Konkoidi (Midye Eğrisi), Böbrek Eğrisi(nefroid),Tekerlek Eğrisi (sikloid),Yaprak Eğrisi(folia),Newtonun Üç çukur Eğrisi (Newton Tridenti), Yılan Eğrisi (serpentine),Sarmaşık Eğrisi(Diocles Kissioidi),Gül eğrisi,Gerdanlık Eğrisi(Catanary),Eşteget Eğrisi(tractrix), Spiral, Kurdela Eğrisi (Bernoulli Lemniskatı),Baston Eğrisi(Lituus), Sekiz Eğrisi (Gerono Kurdelası), Mermi Burnu , Haç Eğrisi(cross curve.)

(v) Tarihsel Sonuçlara Göre Sınıflandırma:

Elips, Parabol, Hiperbol, Agnesi Büyüsü, Pascal Limasonu (bir çemberin kendi noktalarından birine göre konkoid eğrisi) gibi.

(vi) Formüllerinin Şekillerine Göre Eğri Sınıflandırması:

Yarı-kübik parabol

(vii) Herhangi konu içinde inceleneceği tam olarak bilinmeyen eğriler:

Çember,Doğru,Sağ kayış eğrisi, Kapa eğrisi, At Bukacağı (Hippopede),Bicorn, Piriform (armut şekilli quartic) , Clothoid,Cochleoid , Cayley Sextiği,Şeytan Eğrisi

(viii) Kısa zaman eğrisi(Brachistochrone):

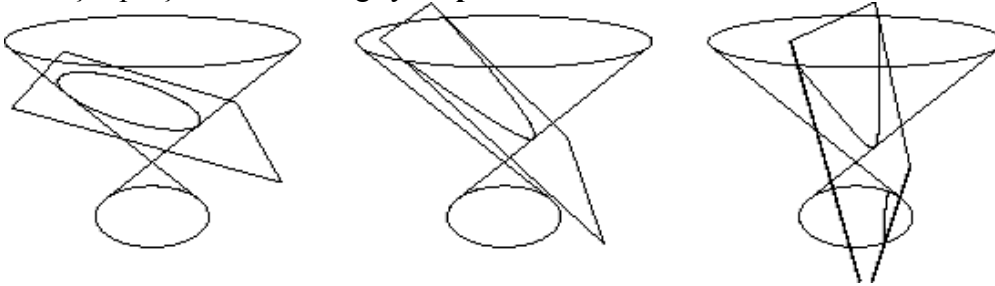
Verilen iki noktadan geçen eğriler arasında bir parçacığın ,noktalardan yüksek olanından alçak olanına ideal fizik ortamı altında (ideal yerçekim kuvveti,sürtünmesiz hava dirençsiz,parçacık hacmi yok vs.) en hızlı zamanda kayarak alçalabildiği eğriye kısa zaman eğrisi denir. Bu özellikteki tek eğri sikloiddir.

(ix) Anallagmatic Eğri: İnversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü kendisi

olan eğrilere **Anallagmatic Eğri** denir. Çemberler ve Cassini ovaleri bunun örnekleridir.

10.2.Düzlemde Konikler

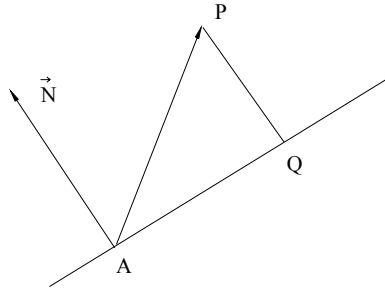
Bir koninin tepe noktasından geçmeyen düzlem ile arakesitine bir konik yada konik kesiti denir. Koni ve düzlemin durumlarına göre üç hal söz konusudur. Koni üzerinde düzleme paralel doğru yoksa, arakesit eğrisi kapalıdır ve eğriye **elips** denir. Eğer koninin bir doğrusu düzleme paralel ise arakesit eğrisi açık eğri olup bu iki kol asimtotik olarak paraleldir ve eğriye **parabol** denir. Son olarak koninin düzleme paralel iki doğrusu varsa eğrinin iki açık parçası vardır ve eğriye **hiperbol** denir.



Şekil 10.1 : Soldaki arakesit eğrisi elips, ortadaki parabol ve sağdaki de hiperboldür

Yukarıdaki konik tanımı üç boyutlu uzaydaki iki nesnenin arakesitine dayalı olduğundan, düzlem analitik geometri için pek uygun değildir. Düzlem analitik geometriye dayalı şu tanımı almak daha uygun olacaktır.

Düzlemde sabit bir noktadan uzaklığının, sabit bir doğruya uzaklığı oranı sabit olan noktaların cümlesine **konik** denir Buradaki sabit doğruya **koniğin doğrultmanı**, sabit noktaya koniğin **odağı** ve sabit orana da **koniğin dış merkezliği** denir.



Şekil 10.2

Sabit noktayı F , F den geçmeyen sabit doğruyu d ve sabit oranı da e olarak alalım. Doğrunun parametrik denklemi

$$d \dots X = A + \lambda \vec{a}$$

ve normali de $\vec{N}$ olsun. Buna göre;

$$\vec{PQ} = -P_{\vec{N}}(\vec{AP}) = \frac{-\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|} \vec{N}$$

$$\|\vec{PQ}\| = \frac{|\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

uzunluğu P noktasının d doğrusuna uzaklığıdır. Bu uzaklığı $\|Pd\|$ şeklinde belirtelim. Tanımdan ;

$$\frac{\|\vec{PF}\|}{\|Pd\|} = e$$

olduğundan ,

$$\|\vec{N}\| \|\vec{PF}\| = e \langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle$$

bulunur. Bu son eşitliği sağlayan P noktalarının belirlediği **geometrik nesne** aranan koniktir. Bu eşitliğe de bu **koniğin denklemi** denir.

F den geçen ve doğrultmana dik olan doğruya **koniğin eksen** denir.

Teorem 10.2.1. Her konik kendi eksenine göre simetriktir.

İspat: A noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{\alpha}$ olan doğruya göre simetrisinin

$$S_{A,\vec{\alpha}}(P) = 2A - P + \frac{2\langle \overrightarrow{AP}, \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$$

olduğunu hatırlayalım. Koniğin ekseninin F noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{N}$ olan doğru olması nedeniyle ;

$$S_{F,\vec{N}}(P) = 2F - P + \frac{2\langle \overrightarrow{FP}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$$

şeklinde olacaktır. Konik denkleminde P yerine $S_{F,\vec{N}}(P)$ alarak

$$\|\vec{N}\| \left\| \overrightarrow{S_{F,\vec{N}}(P)F} \right\| = e \left\langle \overrightarrow{AS_{F,\vec{N}}(P)}, \vec{N} \right\rangle$$

eşitliği bulunur.

$$\left\| \overrightarrow{S_{F,\vec{N}}(P)F} \right\| = \left\| \overrightarrow{PF} \right\|$$

ve

$$\left| \left\langle \overrightarrow{AS_{F,\vec{N}}(P)}, \vec{N} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \right\rangle \right|$$

olduğundan konik denklemini yeniden elde ederiz. O halde konik kendi eksenine göre simetriktir.

10.2.1.Koniğin Ekseniyle Doğrultmanın Kesiştiği Nokta

Koniğin doğrultmanı ile ekseninin parametrik denklemleri

$$X = A + \lambda \vec{\alpha}$$

$$X = F + \mu \vec{N}$$

olacağından Bu iki denklemi eşitleyerek

$$\overrightarrow{AF} = \lambda \vec{\alpha} - \mu \vec{N}$$

eşitliğinin her iki yanını $\vec{\alpha}$ ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{AF}, \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2},$$

buluruz.

$\vec{N}$ ile iç çarpıma tabi tutarak da

$$\mu = \frac{-\langle \vec{AF}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2}$$

değerini elde ederiz. Buradan D eksenle doğrultmanın kesiştiği nokta olmak üzere ;

$$D = A + \frac{\langle \vec{AF}, \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$$

veya

$$D = F - \frac{\langle \vec{AF}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$$

bulunur.

Bu eşitliklerden görüldüğü gibi ; A noktası belli iken D noktası belli olduğundan ; koniğin eksenini ile doğrultmanın kesiştiği nokta olarak A noktasını almak, genelliği bozmaz. Buna göre ;

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|} &= \frac{\|\vec{AP}\| \|\vec{N}\| \cos \theta}{\|\vec{N}\|} \\ &= \|\vec{AP}\| \cos \theta \end{aligned}$$

olduğundan ,

$$\|\vec{PF}\| = e \|\vec{AP}\| \cos \theta$$

olur. $\vec{AP}$ ile $\vec{N}$ arasındaki açı $\vec{AP}$ ile $\vec{AF}$ arasındaki açıya eşit olduğundan;

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{AP}, \vec{AF} \rangle}{\|\vec{AP}\| \|\vec{AF}\|}$$

bulunur. Bunu yerine yazarak;

$$\|\vec{PF}\| = e \left\langle \vec{AP}, \frac{\vec{AF}}{\|\vec{AF}\|} \right\rangle$$

veya

$$\left\| \overrightarrow{AF} \right\| \left\| \overrightarrow{PF} \right\| = e \left| \left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AF} \right\rangle \right|$$

eşitliği de konik denklemi olur.

10.2.2. Koniğin Tepe Noktaları

Koniğin eksenine kesiştiği noktalara koniğin **tepe noktaları** denir.

Bir koniğin tepe noktası , ya $|AF|$ doğru parçası üzerinde yada dışındadır.

Eğer $|AF|$ doğru parçası üzerinde ise T tepe noktasını göstermek

üzere ;

$$T = \lambda F + (1 - \lambda)A, 0 < \lambda \leq 1$$

olur. T nin konik üzerinde olması nedeniyle ,

$$e = \frac{\left\| \vec{N} \right\| \left\| \overrightarrow{TF} \right\|}{\left| \left\langle \overrightarrow{AT}, \vec{N} \right\rangle \right|}.$$

yazılabilir.

$$\overrightarrow{TF} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AF}$$

olduğundan ,

$$e = \frac{1 - \lambda}{\lambda}, 0 < \lambda \leq 1, \lambda = \frac{1}{1 + e}$$

ve

$$T = \frac{F + eA}{1 + e}$$

bulunur.

Eğer T' tepe noktası $|AF|$ doğru parçası dışında ise ,

$$T' = \mu F + (1 - \mu)A, \mu < 0$$

veya $\mu > 1$ eşitliğinden $e \neq 1$

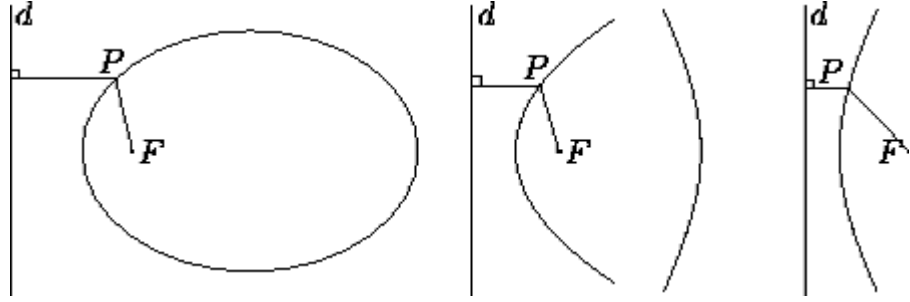
$$T' = \frac{F - eA}{1 - e}$$

olur.

10.2.3.Konik Çeşitleri

$e = 1$ özelliğindeki koniğe **parabol**, $e < 1$ özelliğindeki koniğe **elips**
 $e > 1$ özelliğindeki koniğe **hiperbol** denir.

$e \neq 1$ özelliğindeki konikler için $|TT'|$ doğru parçasının orta noktasına **koniğin merkezi** denir.



Şekil.10.3.: $e = 7$ (solda), $e = 1$ (ortada), $e = 2$ (sağda)

10.2.4.Parabol ve Özellikleri

$e = 1$ halinde konik denklemi

$$\|\overrightarrow{AF}\| \|\overrightarrow{PF}\| = \left| \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AF} \rangle \right|$$

ve

$$T = \frac{A + F}{2}$$

de tek tepe noktasıdır. $T = O$ alalım

(i) Parabolün eksenini X – eksen, T den geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da Y – eksen olarak alıp dik koordinat sistemini oluşturursak,

$$A = -F, F = (c, 0), A = (-c, 0)$$

olacağından, parabolün denklemi

$$y^2 = 4cx$$

olarak bulunur.

- Bu koordinat sisteminde doğrultmanın denklemi $x + c = 0$

- $F = (c, 0)$ odaklı ,

$$y^2 = 4cx$$

parabolünü C ile belirtelim. $P = (x, y), P' = (x', y')$ noktaları da

C üzerinde iki nokta olsun. $\widehat{PP'}$ kirişi ile sınırlı bölgenin alanı ve bu parabol yayının uzunluğu

$$\frac{|y' - y|}{24c}$$

dir.

- Q, C üzerinde bulunan ve bu noktadaki teğeti $\widehat{PP'}$ kirişine paralel olan nokta olmak üzere ; $\frac{|y' - y|}{24c}$ değeri $\Delta PQP'$ üçgeninin alanının $\frac{4}{3}$ katına eşittir(**Archimedes**)
- $(0,0), (x, y)$ noktaları arasındaki yayın uzunluğu,

$$\frac{y}{4} \sqrt{4 + \frac{y^2}{c^2}} + c \arcsin h\left(\frac{y}{2c}\right) = \frac{y}{4} \sqrt{4 + \frac{y^2}{c^2}} + c \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4c^2}}{2c}\right)$$

- C nin kutupsal koordinat sistemindeki koordinatları
- Orijini F olan herhangi bir koordinat sisteminde ; $l = 2c$ parabolün - aşağıda tanımlayacağımız- dikdörtgensel yanının (Latus Rectum'unun) yarısı olan parabolün denklemi;

$$\rho = \frac{l}{1 - \cos \theta}$$

- Q, C üzerinde bulunan herhangi bir nokta ise $\angle QF$ ışını ve Q noktasından geçen yatay doğru , Q noktasındaki C nin teğeti ile aynı açıyı yaparlar Bu nedenle ; bir ışık kaynağı eksene paralel olarak parabolde yansıtılırsa bu ışık F noktası üzerine yansır (**Parabolik Yansıtıcı Prensibi**).

(ii) Eğer parabolün eksenini Y – eksen, T den geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da X – eksen olarak alıp dik koordinat sistemini oluşturursak,

$F = (0, c), A = (0, -c)$ olacağından aynı hesaplamalarla parabolün denklemi $x^2 = 4cy$

olur. Bu koordinat sisteminde doğrultmanın denklemi $y + c = 0$

- Odaktan doğrultmana indirilen dikmenin uzunluğuna parabolün **yarı parametresi** denir. Buna göre p parametre olmak üzere $p = 2c$ olur.
- Odaktan geçen ve eksene dik olan kirişe parabolün **dikdörtgensel yanı (Latus Rectum'u)** denir. Bunun uzunluğu $4c$ dir.

10.2.5. Merkezci Konikler

$e \neq 1$ şeklindeki koniklere **Merkezci Konikler** denir. Merkez C olmak üzere

$$C = \frac{T + T'}{2}$$

veya

$$C = \frac{F - e^2 A}{1 - e^2}$$

dir.

Eğer koordinat sistemimizin orijinini C seçersek

$$T' = -T, F = e^2 A, T = eA, T' = -eA, F = eT$$

olur. Böylece merkezi orijinde olan konik denklemi ,bu son eşitlikleri kullanarak;

$$e^2 \|P\|^2 \|F\|^2 - e^4 \langle P, F \rangle = (1 - e^2) \|F\|^4$$

biçiminde e, F 'ye **bağlı genel merkezci konik** denklemi bulunur. Bu eşitlikten görüldüğü gibi e, F verildiğinde merkezci konik tamamen verilmiş olur.

Gerekli eşitlikler kullanılarak sırasıyla e, A ya ve e, T 'ye bağlı denklemleri de sırasıyla;

$$\|P\|^2 \|A\|^2 - e^2 \langle P, A \rangle^2 = (1 - e^2) e^2 \|A\|^4$$

$$\|P\|^2 \|T\|^2 - e^2 \langle P, T \rangle^2 = (1 - e^2) \|T\|^4$$

şeklinde bulunur.

10.2.5.1. Merkezci Koniklerin Bazı Özellikleri

- **Her merkezci konik kendi merkezine göre simetriktir.**

Bunun ispatı ; merkezi orijin seçip , bir noktaya göre simetri tanımı kullanılarak kolayca yapılabilir.

- **Her merkezci konik merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruya göre simetriktir.**

Bunun ispatı da merkez orijin seçilip ,merkezden geçen doğruya göre simetri tanımı kullanılarak kolayca gösterilir.

- Her merkezci konik ikinci bir odağa ve doğrultmana sahiptir.

Bunun ispatı ; yine merkez orijin seçilip , doğruya göre simetri tanımı kullanılarak kolayca gösterilir. İkinci odak $F' = S_C(F)$, doğrultmanın parametrik denklemi

$$d \dots X = A + \lambda \vec{\alpha}$$

iken ikinci doğrultmanın parametrik denklemi de

$$d' \dots X = -A + \lambda \vec{\alpha}$$

olur.

10.2.5.2.Merkezcil Koniklerin Basit Denklemleri

- Merkezci koniğin merkezini orijin ,ksenini X – ekseni , merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da Y – ekseni alarak oluşturulan koordinat sistemine göre

$$T = (a,0), a > 0, F = (ea,0), A = \left(\frac{a}{e}, 0\right)$$

olur. Bu eşitlikleri kullanıp gerekli işlemleri yaparak;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1 \quad (10.2.5.1)$$

buluruz.

- Eğer merkezci koniğin merkezini orijin ,ksenini Y – ekseni merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da X – ekseni alarak oluşturulan koordinat sistemine göre

$$T = (0,b), b > 0, F = (0,eb), A = \left(0, \frac{b}{e}\right)$$

olup, yukarıdaki gibi gerekli işlemler yapılırsa ;

$$\frac{x^2}{(1-e^2)b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10.2.5.2)$$

bulunur.

10.2.5.3.Elips ve Özellikleri

$0 < e < 1$ iken koniğe elips dendiğini biliyoruz O halde

$$0 < e^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - e^2 < 1$$

olduğundan;merkezi orijinde olan elipsin eksenini , X – ekseni , merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da Y – ekseni olarak oluşturulan koordinat sistemine göre denklemi

$$T = (a,0), A = \left(\frac{a}{e}, 0\right)$$

olmak üzere ;

(10.2.5.1) eşitliğinde $b = a\sqrt{1 - e^2}$ alınarak ;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bulunur.

- Eksenini Y – ekseni, merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da X – ekseni olarak oluşturulan koordinat sistemine göre denklemi

$$T = (0, b), b > 0, F = (0, eb), A = \left(0, \frac{b}{e}\right)$$

olmak üzere ; (10.2.5.2) eşitliğinde $a = b\sqrt{1 - e^2}$ alınarak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemini buluruz.

- $|TT'|$ doğru parçasına **elipsin büyük çapı**,merkezden geçen doğrunun elipsi kestiği noktalar w, w' ise $|ww'|$ doğru parçasına da **elipsin küçük çapı** denir.

Buna göre ; elipsin büyük çap uzunluğu (10.2.5.1) eşitliğindeki koordinat sisteminde, $|TT'| = 2a$, (10.2.5.2) eşitliğindeki koordinat sisteminde de $|TT'| = 2b$ olur. Aynı şekilde küçük çap uzunluğu da

(10.2.5.1) eşitliğindeki koordinat sisteminde $|ww'| = 2b$,(10.2.5.2)

eşitliğindeki koordinat sisteminde $|ww'| = 2a$ olur.

- $b < a$ ($a < b$) iken X – eksenine (Y – eksenine) **büyük eksen** ,
 Y – eksenine (X – eksenine) de **küçük eksen** de denir.
- Merkezin her iki odağa olan uzaklığı $b < a$ ($a < b$) iken
 $\sqrt{a^2 - b^2} \left(\sqrt{b^2 - a^2} \right)$
- Elips üzerindeki bir noktanın odaklara uzaklığı toplamı,
 $b < a$ ($a < b$) iken $2a(2b)$.
- Odaktan geçen ve doğrultmana paralel olan doğrunun elipsi kestiği kirişe elipsin **dik dörtgensel yanları(Latus Rectum'u)** denir. Merkezi orijinde olan elipsin dik dörtgensel yanlarının uç noktalarının koordinatları $b < a$ ($a < b$) iken
 $L = (ea, a(1 - e^2)), L' = (ea, -a(1 - e^2))$

$$[L = (b(1 - e^2), eb), L' = (-b(1 - e^2), eb)]$$

$$|LL'| = 2a(1 - e^2) = 2b\sqrt{1 - e^2} \quad \left[|LL'| = 2b(1 - e^2) = 2a\sqrt{1 - e^2} \right].$$

- $b < a$ ($a < b$) iken
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \left(e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \text{dır.}$$

- Merkezden her iki doğrultmana olan uzaklık $b < a$ ($a < b$) iken
$$\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right)$$
 olur.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipsini C ile gösterirsek;elipsin odakları

$$F = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F' = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

olur.

- C nin parametrik denklemi

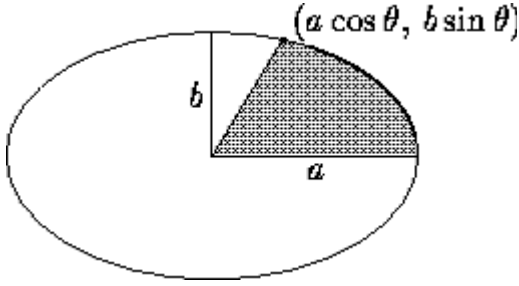
$$\alpha(t) = (a \cos \theta, b \sin \theta) .$$

olur.

Şekil 10.2.5.1 deki gölgelendirilmiş kesitin alanı

$$\frac{ab\theta}{2} = \frac{ab \arccos(\frac{x}{a})}{2}$$

olur.



Şekil 10.2.5.1

- $(a,0)$ dan $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ olan uzunluk, E eliptik integral olmak üzere $a(E(\pi/2, e) - E(\pi/2 - \theta, e))$.
- $\theta = 2\pi$ alarak elipsin sınırladığı alanı πab ve çevresini de $4aE(\pi/2, e)$ olarak buluruz.
- C nin rasyonel parametrik denklemi ;

$$\alpha(t) = \left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2} \right)$$

olur.

- C nin homogen koordinatlarda parametrik gösterimi

$$\alpha(t) = (a(1-t^2), 2bt, 1+t^2)$$

şeklindedir.

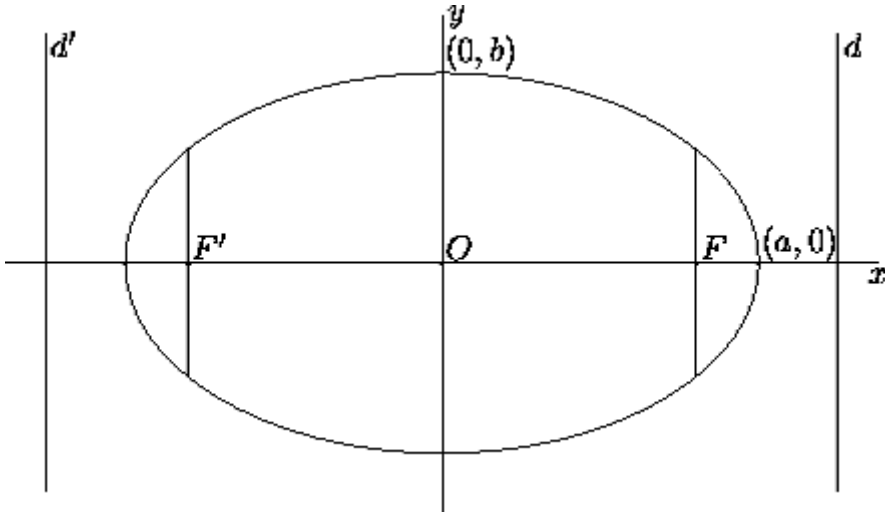
- C nin kutupsal koordinatlardaki denklemi;

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$

- Elipsin odağı kutup noktası olsun. $l = \frac{b^2}{a}$ yani ;yarı -larus rectum uzunluğu ve odağın apsisi pozitif iken pozitif işaret ,negatif iken negatif işaret kullanılmak üzere; C nin kutupsal koordinatlardaki denklemi

$$\rho = \frac{l}{1 \pm e \cos \theta}.$$

- Elipsin herhangi P noktasındaki teğet $\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PF'}$ vektörleriyle aynı açı yaparlar. Bu nedenle F noktasından çıkan ışık kaynağı elips üzerinde yansıtılırsa F' noktasından da geçer
- Elips üzerindeki herhangi bir noktadaki teğet doğrusunun F, F' noktalarına uzaklıkları çarpımı sabit ve b^2 ye eşittir.
- **Lahire Teoremi :** D, D' düzlemde sabit iki doğru olsun. üzerinde P, P', P'' noktaları bulunan hareketli üçüncü bir doğruyu göz önüne alalım. Eğer P noktasını D üzerinde , P' noktasını da D' üzerinde kalacak şekilde hareketli doğruyu hareket ettirirsek P'' noktası bir elips çizer.



Şekil10.2.5.2 Büyük yarı eksen uzunluğu a ,küçük yarı eksen uzunluğu b ve $\frac{b}{a} = 0.6$ olan elips

10.2.5.4.Hiperbol ve Özellikleri

$e > 1 \Rightarrow e^2 - 1 > 0$ olduğundan;

- Merkezi orijinde olan elipsin eksenini X – eksenini , merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da Y – eksenini alarak oluşturulan koordinat sistemine göre

(10.2.5.1) eşitliğinde, $T = (a, 0)$, $A = (\frac{a}{e}, 0)$

olmak üzere ; $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ alınarak

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemini bulunur.

- Eksenini Y – eksenini, merkezden geçen ve doğrultmana paralel olan doğruyu da X – eksenini alarak oluşturulan koordinat sistemine göre

$T = (0, b)$, $b > 0$, $F = (0, eb)$, $A = (0, \frac{b}{e})$

olmak üzere ; (10.2.5.2) eşitliğinde $a = b\sqrt{e^2 - 1}$ alınarak,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemini bulunur.

- $b < a$ ($a < b$) iken X – eksenine (Y – eksenine) hiperbolün **transversal eksenini** , Y – eksenine (X – eksenine) hiperbolün **eşlenik eksenini** denir .
- Transversal eksen ile hiperbolün arakesit noktalarına **hiperbolün tepe noktaları** denir.
- $2a(2b)$ uzunluğuna **hiperbolün transversal eksen uzunluğu** , $2b(2a)$ uzunluğuna da **hiperbolün eşlenik eksen uzunluğu** denir.
- Merkezin her iki odağı olan uzaklığı $b < a$ ($a < b$) iken $\sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{b^2 + a^2})$ olur.

- Hiperbol üzerindeki bir noktanın odaklara uzaklığı farkı $b < a$ ($a < b$) iken $2a(2b)$ olur.
- Odaklardan geçen ve transversal eksene dik olan doğrunun hiperbolü kestiği kirişe, hiperbolün **dikdörtgensel yanları(Latus Rectum'u)** denir. Merkezi orijinde olan hiperbolün dikdörtgensel yanlarının uç noktalarının koordinatları ; $b < a$ ($a < b$) iken

$$L = (ea, a(e^2 - 1)), L' = (ea, -a(e^2 - 1))$$

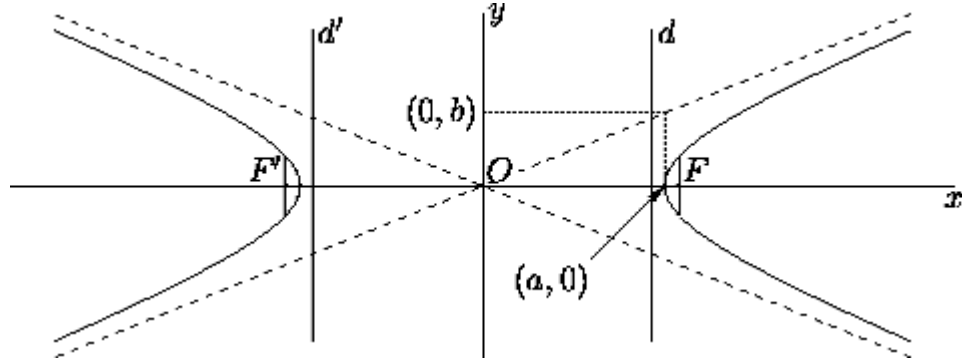
$$[L = (b(e^2 - 1), eb), L' = (-b(e^2 - 1), eb)]$$

$$|LL'| = \frac{2b^2}{a} \quad \left[|LL'| = \frac{2a^2}{b} \right].$$

- $b < a$ ($a < b$) iken
- $$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad \left(e = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} \right)$$
- Merkezden her iki doğrultmana olan uzaklık ta $b < a$ ($a < b$) iken

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

- $a = b$ olması halinde hiperbole **dikdörtgen hiperbol** denir. Bu halde $e = \sqrt{2}$ dir.



Şekil.10.2.5.3 : Transversal yarı eksen uzunluğu , eşlenik eksen uzunluğu b ve $\frac{b}{a} = 0.4$ olan hiperbol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolünü C , bunun odaklarını

$$F = (\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F' = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

ile belirtelim. Bu hiperbole eşlenik olan

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolünü de C' ile belirtelim.

- C nin asimtotu ile C' nün asimtotu aynıdır.

C nin dışmerkezliği e ve C' nün dışmerkezliği e' arasında

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$$

bağıntısı vardır.

- C nin parametrik denklemi ;

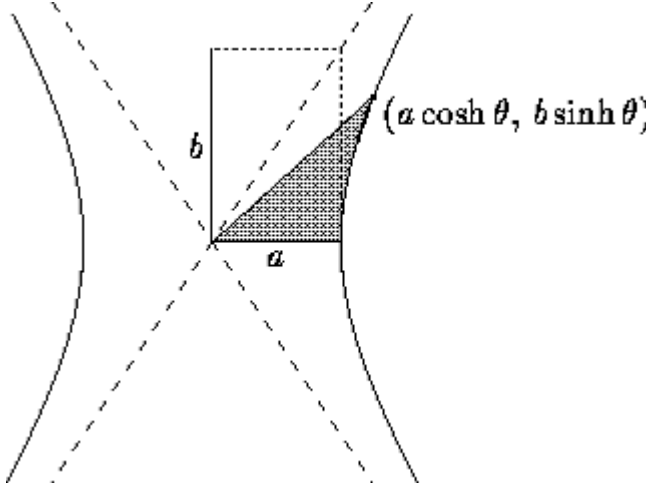
$$\alpha(\theta) = (a \sec \theta, b \tan \theta).$$

Sadece bir kanadı veren diğer parametrik denklem de ;

$$\alpha(\theta) = (a \cosh \theta, b \sinh \theta).$$

Şekil.10.2.5.4 deki gölgelendirilmiş kesitin alanı

$$\frac{ab\theta}{2} = \frac{ab \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)}{2} = \frac{ab \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)}{2}$$



Şekil.10.2.5.4

- $(a,0)$ noktasından $(a \cosh \theta, b \sinh \theta)$ noktasına olan yay uzunluğu, E eliptik integral, e dışmerkezlilik, $x = a \cosh \theta$ olmak üzere;

$$a \int_0^\theta \sqrt{e^2 \cosh^2 \phi - 1} d\phi = -biE\left(\theta, \frac{ea}{b}\right) = a \int_1^x \sqrt{\frac{e^2 \xi^2 - a^2}{\xi^2 - a^2}} d\xi$$

- C nin rasyonel parametrik gösterimi

$$\alpha(t) = \left(\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}, \frac{2bt}{1-t^2} \right)$$

şeklindedir.

- C nin kutupsal koordinatlardaki denklemi;

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta}}$$

- Hiperbolün odağı kutup noktası ise ; C nin kutupsal koordinatlardaki denklemi

$$l = \frac{b^2}{a} \text{ olmak üzere;}$$

yani yarı -larus rectum uzunluğu ve odağın apsisi negatif iken pozitif işaret ,pozitif iken negatif işaret kullanılmak üzere;

$$\rho = \frac{l}{1 \pm e \cos \theta}$$

- Hiperbolün herhangi P noktasındaki teğeti ; $\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PF'}$ vektörleriyle aynı açıyı yaparlar. Bu nedenle ; F noktasından çıkan ışık kaynağı hiperbol üzerinde yansıtılırsa , F' noktasından da çıktığı görülür.
- Hiperbolün üzerindeki herhangi bir noktadaki teğet doğrusunun F, F' noktalarına uzaklıkları çarpımı sabit ve b^2 ye eşittir.
- Hiperbolün herhangi P noktasından asimtotlara paraleller çizerek oluşturulan paralel kenarın alanı sabit ve $\frac{ab}{2}$ birimdir.

- d düzlemde hiperbolü P, P' noktalarında ve hiperbolün asimtotlarını da Q, Q' noktalarında kesen , herhangi doğru ise

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{P'Q'}\| \text{ dır.}$$

Eğer d doğrusu hiperbole teğet ise $P = P'$ ve $P, |QQ'|$ doğru parçasının orta noktasıdır.

10.3.Düzlemde Parametrik Denklemlili Eğriler

Tanım:

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

dönüşümü için

1.

$$x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir.

2.

$\forall t \in I$ için $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ türevlerinden en az birisi sıfırdan farklı

3. $\forall s, t \in I$ için $\alpha(t) = \alpha(s) \Leftrightarrow s = t$

özellikleri sağlanıyorsa α' ya uygun parametrik eğri yayı denir.

Tanım: I nin $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ için

$$\alpha : (t_i, t_{i+1}) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

şeklinde ifade edildiğinde α uygun parametrik eğri yayı olacak şekilde bir parçalanışı varsa

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dönüşümüne uygun parametrik eğri denir.

Tanım:

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

eğrisinde $x(t), y(t)$ fonksiyonları rasyonel fonksiyonlar ise eğriye

Ünikürsal Eğri denir.

Tanım: Bir E eğrisi bir başka C eğrisi üzerinde kaymadan yuvarlanırken , E ye göre gözlenen bir noktanın çizdiği eğriye **yuvarlanma , rulet** yada **spirograf eğrisi** , gözlenen noktaya da **kutup noktası** denir. Bu eğrilerin bilinen en meşhurları şunlardır.

- Yuvarlanan eğrinin bir çember sabit eğrinin bir doğru olması halinde elde edilen eğrilere genel olarak **Trokoid** eğrisi denir. Özel olarak gözlenen nokta , E eğrisi üzerinde ise trokoide **Sikloid** eğrisi denir.

$$y = \frac{x^2}{4a}$$

parabolünün X – ekseninde yuvarlanırken parabolün $F = (0, a)$ odağının çizdiği

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

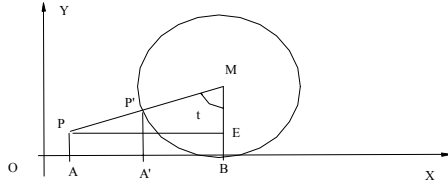
eğrisine **gerdanlık (catenary)** eğrisi denir.

Şimdi hareketli çemberin yarı çapı a ve gözlenen noktanın hareketli çemberin merkezine olan uzaklığı k olmak üzere , trokoid eğrisinin parametrik denkleminin ,

$$\alpha(t) = (at - k \sin t, a - k \cos t)$$

şeklinde olduğunu gösterelim.

10.3.1. Trokoid Eğrisinin Parametrik Denkleminin Bulunuşu



Şekil.10.3.1: Trokoid Eğrisi

$$|PM| = k, |P'M| = a, |OA| = x, |PA| = y$$

olmak üzere; Şekil.10.3.1 'den $\triangle PME$ dik üçgeninden

$$k \sin t = |PE|, |ME| = k \cos t$$

ve kaymadan yuvarlanma gereğince $|OB| = \overset{\frown}{P'B}$ olduğundan $|OB| = at$ olur.

$$x(t) = |OA| = |OB| - |PE|$$

olduğundan da ;

$$x(t) = at - k \sin t$$

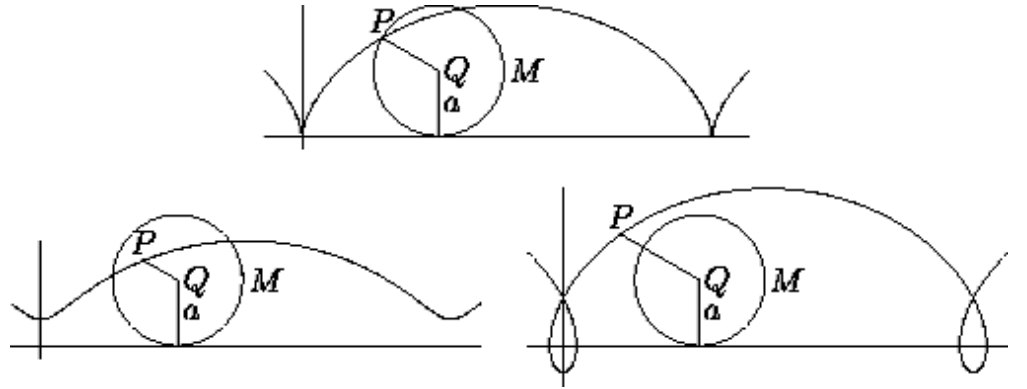
bulunur. Benzer şekilde

$$y(t) = |PA| = |MB| - |ME|$$

olduğundan ,

$$y(t) = a - k \cos t$$

bulunur.



Şekil.10.3.2 : Sikloid (üstte $k = a$) $k = 0.5a$ (eğrilmiş sikloid), $k = 1.5a$ (basık sikloid) özelliğindeki trokoid (altta)

$k < a$ iken trokoide **curtate (eğrilmiş) sikloid**, $k > a$ durumunda da **poralate (basık) sikloid** denir.

Yukarıdaki trokoid denkleminde $k = a$ alınırsa sikloidin parametrik denklemleri

$$\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$$

olarak bulunur.

Sikloid eğrisinin çok değerli fonksiyonu ,

$$x(t) = at - k \sin t, y(t) = a - k \cos t$$

eşitliklerinden t yok edilerek

$$x = \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) \pm \sqrt{2ay - y^2}$$

şeklinde bulunur.

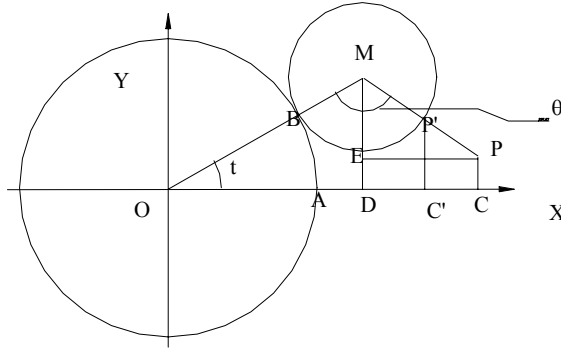
- Sikloidin bir yayının uzunluğu $8a$ ve bir yayının altında kalan alan da $3\pi a^2$.
- Sabit ve yuvarlanan eğrilerin her ikisi de çember iken; hareketli çember dışta ise , hareketli çembere göre gözlenen noktanın çizdiği eğriye **Epitrokoid Eğrisi** denir.

Bu defa da hareketli çemberin yarı çapı a , sabit çemberin yarıçapı b ve gözlenen noktanın hareketli çemberin merkezine olan uzaklığı k iken, epitrokoid eğrisinin parametrik denkleminin

$$\alpha(t) = \left((a+b)\cos t - k\cos\left(1+\frac{a}{b}\right)t, (a+b)\sin t - k\sin\left(1+\frac{a}{b}\right)t \right)$$

olduğunu gösterelim.

10.3.2.Epitrokoid Eğrisinin Parametrik Denkleminin Bulunuşu



Şekil.10.3.3

Sabit çemberin merkezini orijin, iki çemberin teğet olduğu herhangi noktayı da A olarak alalım. O, A noktalarından geçen doğruyu X – ekseni, O noktasında bu doğruya dik olan doğruyu da Y – ekseni olarak alalım. Kaymadan yuvarlanma gereğince

$\widehat{AB} = \widehat{BP'}$ olduğundan $at = b\theta$ veya $\theta = \frac{a}{b}t$ olur. Şekil 10.3.3 'den

$$x(t) = |OC| = |OD| + |DC|$$

ve $\triangle OMD$ dik üçgeninden ,

$$|OD| = (a+b)\cos t$$

$\triangle EMP$ dik üçgeninden

$$|DC| = k \sin \widehat{EMP}$$

olur. Diğer taraftan ;

$$\theta = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \hat{EMP}$$

olduğundan

$$\hat{EMP} = \left(1 + \frac{a}{b}\right)t - \frac{\pi}{2}$$

olur .

$$|DC| = -k \cos\left(1 + \frac{a}{b}\right)t$$

olmasından da

$$x(t) = (a + b) \cos t - k \cos\left(1 + \frac{a}{b}\right)t$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$y(t) = |PC| = |MD| - |ME|$$

olduğundan ;

$\triangle OMD, \triangle MEP$ dik üçgenlerinden sırasıyla ;

$$|MD| = (a + b) \sin t, |ME| = k \sin\left(1 + \frac{a}{b}\right)t,$$

$$y(t) = (a + b) \sin t - k \sin\left(1 + \frac{a}{b}\right)t$$

bulunur.

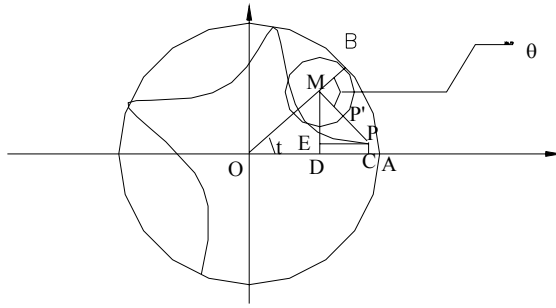
Eğer p, q aralarında asal olan iki sayı olmak üzere ; $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ise

yuvarlanan çember q defa döndükten sonra ilk konumuna geri döner ve oluşan epitrokoid eğrisi de kapalı bir eğri olur.

Eğer $k = b$ alırsak gözlenen nokta hareketli çemberin içimde kalır. Bu halde eğriye **episikloid** denir.

10.3.3.Hipotrokoid Eğrileri

- Sabit ve yuvarlanan eğrilerin her ikisi de çember iken , hareketli çember içten teğet ise , hareketli çember üzerinde gözlenen noktanın çizdiği eğriye **Hipotrokoid Eğrisi** denir.



Şekil.10.3.4

Şimdi de ; hareketli çemberin yarı çapı a , sabit çemberin yarıçapı b ve gözlenen noktanın hareketli çemberin merkezine olan uzaklığı k ise , hipotrokoid eğrisinin parametrik denkleminin

$$\alpha(t) = \left((a - b) \cos t + k \cos\left(-1 + \frac{a}{b}\right)t, (a - b) \sin t - k \sin\left(-1 + \frac{a}{b}\right)t \right)$$

olduğunu gösterelim.

10.3.4.Hipotrokoid Eğrisinin Parametrik Denkleminin Bulunuşu

Sabit çemberin merkezini orijin ,iki çemberin teğet olduğu herhangi noktayı da A olarak alalım. O, A noktalarından geçen doğruyu X –ekseni, O noktasında bu doğruya dik olan doğruyu da Y –ekseni olarak alalım. kaymadan yuvarlanma gereğince ;

$$\widehat{AB} = \widehat{BP'} \text{ olduğundan , } at = b\theta \text{ veya } \theta = \frac{a}{b}t \text{ olur.}$$

Şekil.10.3.4'den

$$x(t) = |OC| = |OD| + |DC|$$

ve $\triangle OMD$ dik üçgeninden ,

$$|OD| = (a - b) \cos t$$

ve $\triangle EMP$ dik üçgeninden de

$$|DC| = k \sin \hat{EMP}$$

olur. Diğer taraftan ;

$$\hat{EMP} = (1 - \frac{a}{b})t + \frac{\pi}{2}$$

olduğundan ;

$$|DC| = k \cos(1 - \frac{a}{b})t$$

ve

$$x(t) = (a - b) \cos t + k \cos(1 - \frac{a}{b})t$$

bulunur.

Benzer şekilde ;

$$y(t) = |PC| = |MD| - |ME|$$

ve $\triangle OMD, \triangle MEP$ dik üçgenlerinden sırasıyla;

$$|MD| = (a - b) \sin t, |ME| = -k \sin(1 - \frac{a}{b})t$$

olduğundan;

$$y(t) = (a - b) \cos t + k \sin(1 - \frac{a}{b})t$$

olur.

Eğer p, q aralarında asal olan iki tam sayı olmak üzere ; $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ise

yuvarlanan çember q defa döndükten sonra ilk konumuna geri döner ve oluşan hipotrokoid eğrisi de kapalı bir eğri olur

Eğer $k = b$ alırsak gözlenen nokta hareketli çemberin dışında kalır. Bu halde eğriye **Hiposikloid** denir.

Özel haller :**1.**

Eğer $b = k = a$ ise eğri tek bir noktadan oluşur.

2. $b = k = \frac{a}{2}$ eğri sabit çemberin çapını verir.**3.** $b = k = \frac{a}{3}$ ise eğriye **deltoid** denir. Bu eğrinin cebirsel denklemi

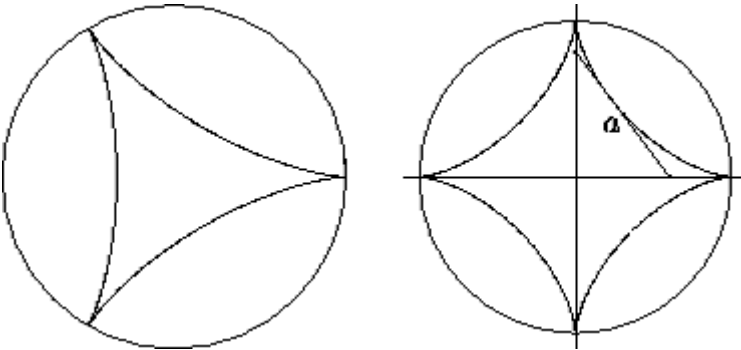
$$(x^2 + y^2)^2 - 8ax^3 + 24axy^2 + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0$$

4. $b = k = \frac{a}{4}$ ise eğriye **astroid** denir. Bu eğrinin cebirsel denklemi de

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

olur.

Hipotrokoid eğrisinin bir özelliği de ; her noktadaki teğet doğrularının eksenleri kestiği noktalar arasındaki uzaklığın sabit ve a değerine eşit olmasıdır. Tersine başlangıç ve bitim noktaları koordinat eksenleri üzerinde kalarak hareket eden ve sabit uzunluğa sahip ,doğru parçasının zarfına astroid denir.



Şekil.10.3.5: $a = 3b$ özellikli hiposikloid (Deltoid), $a = 4b$ özellikli hiposikloid (Astroid)

10.3.5.Düzlemsel Parametrik Eğrilerin Özel Noktaları

Tanım: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisi için

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümünden elde edilen her bir noktaya, bu eğrinin bir **singüler** yada **tekil** noktası denir.

Tanım: Bir eğrinin uygun parametrik eğri yayı bir alanı kapatıyorsa , bu yayı bu eğrinin bir **ilmiği** yada **loop**'u denir.

Buna göre ; bir eğrinin tanım kümesinde

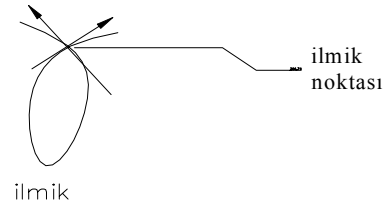
$$1. \alpha : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

uygun parametrik eğri yayı

$$2. \alpha(t_0) = \alpha(t_1)$$

olacak şekilde $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığı varsa bu eğri yayı bir ilmiktir.

Bir eğri yayı ilmik iken ; $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$ noktasına **ilmik noktası** denir. Bir ilmiğin kendi kendisini kesmeyen eğri yayı olduğu tanımından açıktır.

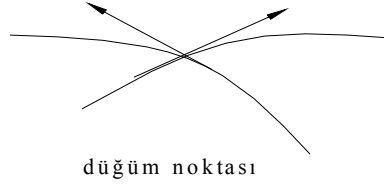


Şekil.10.3.6

Tanım:Bir eğrinin tanım kümesindeki birbirinden farklı $t_i, 1 \leq i \leq k$ parametre değerlerinin hepsi aynı P noktasını veriyorsa yani; $P = \alpha(t_i), 1 \leq i \leq k$ oluyorsa, P noktasına bu eğrinin k – **katlı noktası** denir.

Her bir singüler nokta ve ilmik noktası iki katlı noktadır.

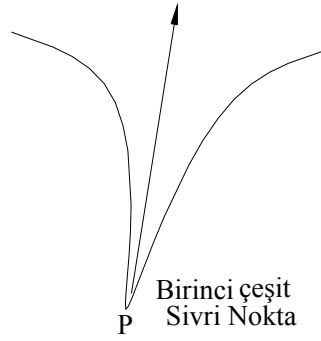
Tanım:Bir eğrinin bir P noktası iki katlı nokta iken, P den geçen ve bu noktada farklı teğetlere sahip olan iki eğri yayı varsa, P noktasına bu eğrinin bir **düğüm noktası** denir.



Şekil.10.3.7

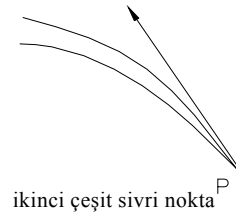
Tanım:Bir eğrinin bir P noktası iki katlı nokta iken, P den geçen ve bu noktada çakışık teğete sahip olan iki eğri yayı varsa, P noktasına bu eğrinin bir **cusp** veya **sivri** noktası denir

Tanım:Bir eğrinin bir P noktası sivri nokta iken, P den geçen ve bu noktada çakışık teğete sahip olan iki eğri yayı teğetin farklı tarafında iseler, P noktasına bu eğrinin **birinci çeşit cusp** veya **birinci çeşit sivri** noktası denir



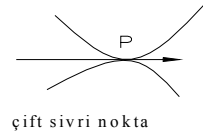
Şekil.10.3.8

Tanım: Bir eğrinin bir P noktası sivri nokta iken , P den geçen ve bu noktada çakışık teğete sahip olan iki eğri yayı ,teğetin aynı tarafında iseler ; P noktasına bu eğrinin **ikinci çeşit cusp** veya **ikinci çeşit sivri** noktası denir.



Şekil.10.3.9

Tanım: Bir eğrinin bir P noktası sivri nokta iken P den geçen ve bu noktada çakışık teğete sahip olan eğri yayları teğetin her iki tarafında iki yana doğru açılıyorsa P noktasına bu eğrinin **çift cusp** veya **çift sivri** noktası denir.



Şekil.10.3.10

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

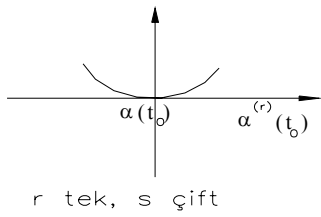
parametrik eğrisi için bazan kolaylık sağlaması amacıyla aşağıdaki halleri kontrol etmek uygun olur.

1. $P = \alpha(t_0)$ noktasında ilk sıfırdan farklı türev vektörünün mertebesi $r, r \geq 1$ olsun. Yani; $\alpha^{(r)}(t_0) \neq 0$ olsun.

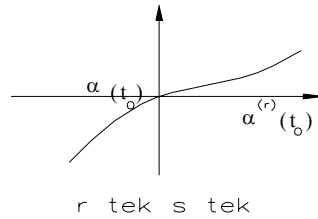
2. $\alpha^{(r)}(t_0)$ vektörüyle lineer bağımsız türev vektörü $\alpha^{(s)}(t_0), s \geq r + 1$ ise, α eğrisinin $P = \alpha(t_0)$ noktasında $\alpha^{(r)}(t_0)$ vektörüne paralel olan doğruya göre aşağıdaki dört durumu söz konusudur.

(i) r tek, s çift

(ii) r tek, s tek

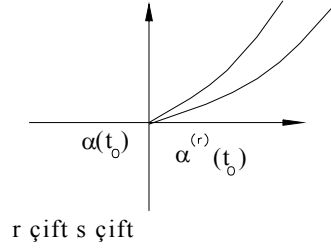


Şekil.10.3.11

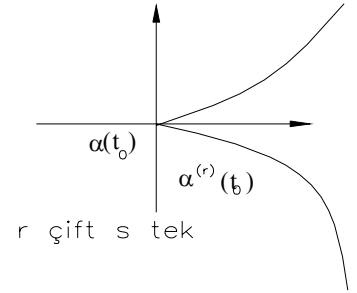


Şekil.10.3.12

- (iii) r çift, s çift
 (iv) r çift, s tek



Şekil.10.3.14



Şekil.10.3.15

10.3.6. Parametrik Düzlemsel Eğrilerin Değişimi ve Çizimi

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

eğrisi için,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

olmak üzere ;

$$m(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

değerine (bu değer sonsuz veya sıfır da olabilir) $P = \alpha(t_0)$ noktasındaki

teğetin eğimi denir. Teğet denklemi

$$y - y(t_0) = m(t_0)(x - x(t_0))$$

eşitliği ile bellidir

Eğer bu limit yoksa ; ya $P = \alpha(t_0)$ noktası ayrık nokta yada bu noktada teğet tek değildir.

10.3.7. Parametrik Düzlemsel Eğrilerde Maximum-Minimum Noktalar ve Konkavlık

Eğrinin $P = \alpha(t_0)$ noktasında $\frac{dx}{dt}(t_0) \neq 0$ ve teğetinin $Y -$ eksenine paralel olmadığını yani $m(t_0) < \infty$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

dir. Buna göre; Maximum minimum noktalar ve konkavlık durumları aşağıdaki gibidir.

(I) Maximum-Minimum Noktalar

(1) $\frac{d^2 y}{dx^2}(t_0) > 0$ ve $m(t_0) = 0$ ise , $P = \alpha(t_0)$ noktası eğrinin bir lokal minimum noktasıdır.

(2) $\frac{d^2 y}{dx^2}(t_0) < 0$ ve $m(t_0) = 0$ ise , $P = \alpha(t_0)$ noktası eğrinin bir **lokal maximum** noktasıdır.

(3) $\frac{d^2 y}{dx^2}(t_0) = 0$ ve $m(t_0) = 0$ ise , $P = \alpha(t_0)$ noktası eğrinin bir **sahanlık noktasıdır**.

(i) Eğer $\frac{d^2 y}{dx^2}(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasının civarında işaret değiştirmeden sıfır oluyorsa $P = \alpha(t_0)$ noktasına **kabartılı nokta** denir.

(ii) Eğer $\frac{d^2y}{dx^2}(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasının civarında işaret değiştirmeden sıfır oluyor ve $m(t_0) = 0$ ise, $P = \alpha(t_0)$ noktasına **kabartılı aşırılık (extremum) noktası** denir.

(iii) Eğer $\frac{d^2y}{dx^2}(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasının civarında işaret değiştirmeden sıfır olurken, $t = t_0$ noktasının her iki yanında da pozitif değer alıyorsa ve $m(t_0) = 0$ ise, $P = \alpha(t_0)$ noktası lokal minimum noktadır.

(iv)

$$\frac{d^2y}{dx^2}(t_0) = 0, \frac{dy}{dx}(t_0) = 0$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2}(t)$$

fonksiyonu $t = t_0$ noktasının sağ ve sol tarafında işaret değiştiriyorsa, $P = \alpha(t_0)$ noktası eğrinin bir **büküm** noktasıdır.

(v)

$$\frac{d^2y}{dx^2}(t_0) = 0$$

ve

$$\frac{dy}{dx}(t_0) = 0, \frac{d^3y}{dx^3}(t_0) \neq 0$$

ise, $P = \alpha(t_0)$ noktası eğrinin bir **büküm** noktasıdır.

(II) Teğet Doğrusuna Göre Konkavlık

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2}(t_0) > 0 \quad P = \alpha(t_0)$$

noktasında eğrinin konkavlığı, bu noktadaki teğetin üstüne doğrudur.

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2}(t_0) < 0 \quad P = \alpha(t_0)$$

noktasında eğrinin konkavlığı , bu noktadaki teğetin altına doğrudur.

$$(3) \frac{d^2 y}{dx^2}(t_0) = 0, \frac{dy}{dx}(t_0) = 0$$

ve

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(t)$$

fonksiyonu $t = t_0$ noktasının sağ ve sol tarafında işaret değiştiriyorsa

$P = \alpha(t_0)$ noktasındaki teğet doğrusuna göre konkavlık yön değiştirmektedir.

Bir parametrik eğrinin sivri noktalarının cinsini belirlemek için aşağıdaki yolu izleyebiliriz:

$P = \alpha(t_0)$ sivri noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$Y = mX + n$$

olmak üzere ;

$$f(t) = y(t) - mx(t) - n$$

için eğer $f(t) > 0$ ise eğri teğetin üstünde , $f(t) < 0$ ise

altında kalır. $t = t_0$ noktasının her iki yanında , $f(t)$ fonksiyonu aynı işarete

sahip ise $P = \alpha(t_0)$ ikinci çeşit sivri noktadır. $t = t_0$ noktasının iki yanında,

$f(t)$ fonksiyonu farklı işarete sahip ise , $P = \alpha(t_0)$ birinci çeşit sivri noktadır.

10.3.8.Düzlemde Parametrik Eğrilerin Asimtotları

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

eğrisi için

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \text{ veya } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty \text{ oluyorsa eğrinin } t = t_0 \text{ noktasında}$$

sonsuz giden kolu vardır.

$$(1) \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$$

oluyorsa ,eğrinin Y – eksenine paralel asimtotu $x = x_0$

doğrusudur.

$$(2) \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$$

oluyorsa , eğrinin X – eksenine paralel asimtotu $y = y_0$ doğrusudur.

$$(3) \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$$

iken

$$m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$

olmak üzere ;

(i) $m = \pm\infty$ veya $m = 0$ oluyorsa , eğrinin asimtotları bu noktada sonsuza atılmıştır .

(ii) $m \neq 0$ ve $m < \infty$ ise m eğik asimtotun eğimidir. Bu durumda ;

$$n = \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - mx(t)]$$

için $n = \pm\infty$ ise eğrinin bu noktadaki asimtotu düzlemin sonsuzdaki doğrusudur.

(iii) $m \neq 0$ ve $m < \infty$ $n = \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - mx(t)] < \infty$

ise

$$Y = mX + n$$

eğrinin eğik asimtotunun denklemidir.

Bir parametrik eğrinin asimtota asimtotun altından mı üstünden mi yaklaştığını belirlemek için aşağıdaki yol izlenebilir :

$$Y = mX + n$$

eğrinin eğik asimtotunun denklemi olmak üzere;

$$g(t) = y(t) - mx(t) - n$$

fonksiyonunun işareti $t = t_0$ civarında incelenerek $g(t) > 0$ olduğu yerlerde eğrinin asimtota üstten, $g(t) < 0$ olduğu yerlerde eğrinin asimtota alttan yaklaştığını belirleriz.

$g(t) = 0$ olduğu noktalar eğri ile asimtotun kesiştiği noktalar.

10.3.9. Parametrik Denklemlili Eğrilerin Simetri Eksenlerinin Bulunması

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

eğrisinin I tanım kümesi simetrik iken ,

- $S_{Q, \vec{N}}$, Q noktasından geçen ve normal (doğrultman vektörü) $\vec{N}$ olan doğruya göre simetriyi göstermek üzere $S_{Q, \vec{N}}(\alpha(t)) = \alpha(-t)$ oluyorsa eğri bu doğruya göre simetriktir.

- S_Q , Q noktasına göre simetriyi göstermek üzere; $S_Q(\alpha(t)) = \alpha(-t)$ oluyorsa, eğri Q noktasına göre simetriktir.

Özel Haller :

(1) X – eksenine göre simetri

X – ekseninin denklemi $y = 0$ olduğundan orijinden geçer ve normal

$\vec{N} = (0, 1)$ olur

$$S_{Q, \vec{N}}(\alpha(t)) = (x(t), -y(t)) = (x(-t), y(-t))$$

eşitliğinden

$$x(t) = x(-t)$$

$$-y(t) = y(-t)$$

bulunur.

(2) Y – eksenine göre simetri

Benzer hesaplamalarla

$$-x(t) = x(-t)$$

$$y(t) = y(-t)$$

(3) $y = x$ doğrusuna göre simetri

$$x(t) = y(-t)$$

$$y(t) = x(-t)$$

10.3.10.Düzlemde Parametrik Denklemlili Eğrilerin Çizimleri

Çizimde aşağıdaki sırayı izlemek uygun olur :

- (1) Eğrinin uygun parametrik eğri yayları bulunur.
- (2) Özel noktalar (maximum, minimum ,sivri, düğüm ,ilmik gibi)varsa bulunur.
- (3) Eğrinin eksenleri kestiği noktalar, $t = \pm\infty$ için limit alarak, $\alpha(-\infty), \alpha(\infty)$ noktaları varsa bulunur
- (4) $x(t), y(t)$ fonksiyonlarının artan azalan olduğu aralıklar belirlenir.
- (5) Asimtotlar bulunur.
- (6) Bulgular tabloya geçilir.
- (7) Eğri çizilir.

Örnek.1 :

$$\alpha(t) = (te^t, t^2 e^t)$$

(1) Eğrinin uygun parametrik eğri yayları:

eğrinin $\alpha'(t) = 0$ olacak şekilde bir noktası yoktur ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir.

$$\alpha(t) = \alpha(s) \Rightarrow \begin{cases} te^t = se^s \\ t^2 e^t = s^2 e^s \end{cases}$$

sisteminden $t \neq 0$ iken $\alpha(t) = \alpha(s) \Leftrightarrow t = s$ bulunur.

O halde eğrinin

$$\alpha : (-\infty, 0) \rightarrow R^2$$

ve

$$\alpha : (0, \infty) \rightarrow R^2$$

şeklinde iki uygun parametrik yayı vardır.

(2)

$$\dot{x}(t) = (1+t)e^t$$

$$\dot{y}(t) = (t^2 + 2t)$$

$$\ddot{x}(t) = (2+t)e^t$$

$$\ddot{y}(t) = (t^2 + 4t + 2)e^t$$

$$\dot{y}(-2) = 0, \dot{y}(0) = 0 \text{ ve } y''(-2) < 0, y''(0) > 0$$

olduğundan $\alpha(0) = (0,0)$ noktası lokal minimum nokta,

$$\alpha(-2) = (-2e^{-2}, 4e^{-2})$$

noktası lokal maximum noktadır.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$

denkleminin çözümü bulunmadığından eğrinin sivri noktası yoktur.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = (0,0) = \alpha(0) \text{ ve } (-\infty, 0) \text{ aralık olduğundan } \alpha : (-\infty, 0) \rightarrow R^2$$

eğri yayı ilmiştir ve $(0,0)$ noktası ilmik noktasıdır.

(3)

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = (0,0) = \alpha(0)$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$
 olur.

$$x(t) = te^t = 0$$

denkleminin ve

$y(t) = t^2 e^t = 0$ denkleminin tek çözümü $t = 0$ olduğundan eğri eksenleri sadece $(0,0)$ noktasında keser.

(4)

$t \in (-\infty, -1)$ için $\dot{x}(t) < 0$ olduğundan $x(t)$ fonksiyonu azalan

$t \in (-1, \infty)$ için $\dot{x}(t) > 0$ olduğundan $x(t)$ fonksiyonu artan

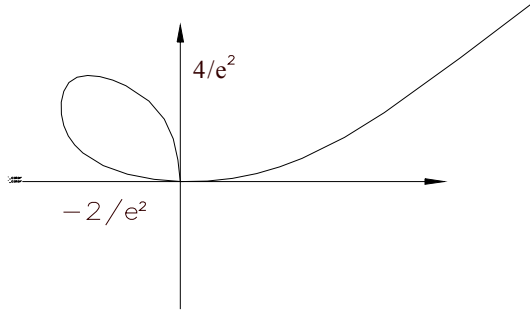
$t \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ için $\dot{y}(t) < 0$ olduğundan $y(t)$ fonksiyonu artan

$t \in (-2, 0)$ için $\dot{y}(t) > 0$ olduğundan $y(t)$ fonksiyonu azalandır.

(5) Eğrinin asimtotları yoktur.

(6)

t	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	- -	+ +	+ +	+ +	
$\dot{y}(t)$	+ +	- -	- -	+ +	
x(t)	0 azalan $\frac{-2}{e^2}$	artan	artan	artan	$+\infty$
y(t)	0 artan $\frac{4}{e^2}$	azalan	azalan	artan	$+\infty$



Şekil.10.3.16

Örnek.2 : $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{1+t}, \frac{1}{(1+t)(t-2)} \right)$

(1) $\alpha'(t) = \left(\frac{t(t+2)}{(1+t)^2}, \frac{1-2t}{(1+t)^2(t-2)^2} \right)$

$\alpha''(t) = \left(\frac{2}{(1+t)^3}, \frac{6(t^2-t+1)}{(1+t)^3(t-2)^3} \right)$

eşitliklerinden görüldüğü gibi $t = -1, t = 2$ dışında sürekli ve türevlenebilirdir.

$\alpha'(t) = \left(\frac{t(t+2)}{(1+t)^2}, \frac{1-2t}{(1+t)^2(t-2)^2} \right) = (0,0)$

eşitliğini sağlayan hiçbir nokta yoktur.

$\alpha(t) = \alpha(s) \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t} = \frac{s^2}{1+s}, \frac{1}{(1+t)(t-2)} = \frac{1}{(1+s)(s-2)}$

$\Leftrightarrow (t^2 - t - 1)(s - t) = 0, -1 \neq t \neq 2$

$\Leftrightarrow s = t, -1 \neq t \neq 2, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \neq t \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

olur.

Buna göre eğri aşağıdaki dört uygun parametrik eğri yayından oluşur.

Bunlar;

$$\alpha : (-\infty, -1) \rightarrow R^2, \alpha : \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \rightarrow R^2, \alpha : \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \rightarrow R^2$$

$$\alpha : \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right) \rightarrow R^2, \alpha : (2, +\infty) \rightarrow R^2$$

$$(2) \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = (1, -1)$$

ve

$$\alpha : \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \rightarrow R^2$$

uygun parametrik eğri yayı olduğundan bu yay ilmik ve (1, -1) ilmik noktasıdır.

$$y'(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1-2t}{t(t-2)^2(t+1)}$$

$$y'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$y''(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{2(t+1)(3t^4 + 3t^3 + t^2 - 4t + 4)}{(t-2)^3 t^3 (t+2)^2}$$

$y''(1/2) < 0$ olduğundan $\alpha(1/2) = (1/6, -4/9)$ noktası lokal minimumdur.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümü bulunmadığından , eğrinin sivri noktası yoktur.

(3)

$$x(t) = \frac{t^2}{1+t} = 0 \Rightarrow t = 0$$

ve $\alpha(0) = (0, -1/2)$ noktasında Y – eksenini keser. $y(t) = 0$ eşitliğini sağlayan hiçbir nokta bulunmadığından eğri X – eksenini kesmez.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{1+t} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{1+t} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1+t)(t-2)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+t)(t-2)} = 0$$

(4)

$$\dot{x}(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow t = 0, t = -2$$

t	$-\infty$	-2		-1	0	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	+	+	-	-		+

$$\dot{y}(t) = \frac{1-2t}{(1+t)^2(t-2)^2} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\dot{y}(t)$	+	+	-

(5)

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{t^2}{1+t} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t^2}{1+t} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{1}{(1+t)(t-2)} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1}{(1+t)(t-2)} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2}{1+t} = \frac{4}{3}, \quad \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{1}{(1+t)(t-2)} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{1}{(1+t)(t-2)} = +\infty$$

olduğundan eğrinin $t = -1, t = 2$ noktalarında sonsuza giden kolları yani, asimtotları vardır.

$$m = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1}{t^2(t-2)} = \frac{-1}{3}$$

$$n = \lim_{t \rightarrow -1} [y(t) - mx(t)] = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^3 - 2t^2 + 3}{3(1+t)(t-2)} = \frac{-7}{9}$$

bulunur. Buna göre ;eğik asimtot

$$Y = -\frac{X}{3} - \frac{7}{9}$$

olur. Yatay asimtot da

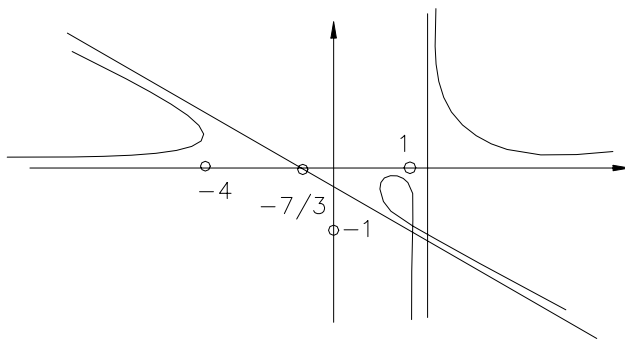
$$X = \frac{4}{3}$$

bulunur.

(6)

t	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	+	+	-	-	-	+	+	+	+
$\dot{y}(t)$	+	+	+	+	+	+	-	-	-
x	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	1	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	1	$+\infty$

(7)



Şekil.10.3.17

10.3.11.Süper Elipsler

Bugün analitik geometriyi bilgisayardan bağımsız,bilgisayarı da analitik geometriden bağımsız düşünmek mümkün değildir .Analitik Geometrinin bilgisayar uygulamaları sayesinde daha çekici ve daha görsel hale geleceği denenerek görülebilir. Tersine bilgisayar programlamada özellikle de grafik programlamada ve grafik tasarımda analitik geometrinin yeri ve hizmeti çok açıktır. Bu nedenle ; grafik tasarımda sürekli kullanılan süper elipsi de burada vermeyi uygun bulduk.

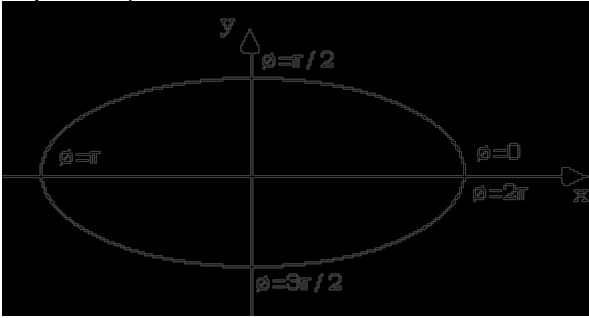
Düzlemde merkezi orijinde bulunan süper elipsin parametrik denklemi

$$\alpha(\phi) = \left(r_x \cos^n \phi, r_y \sin^n \phi \right), 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 < n < \infty$$

şeklinde olup buradaki r_x, r_y değerleri eğrinin eksenleri kestiği noktalar

yani ;eğri $2r_x$ genişliğinde ve $2r_y$ yüksekliğindeki dikdörtgenle

kapatılmıştır.



Şekil 10.3.11.1

Parametrik denklemi kullanarak , açığı düzgün değiştirirsek örneğe bağlı eğriliğe sahip , eğri örnekleri vardır.

Bu eğrilerin kapalı denklemleri de

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{r_x} \right)^{2/n} + \left(\frac{y}{r_y} \right)^{2/n}$$

olmak üzere

1. $f(x,y) = 1$ ise (x,y) noktası süper elips üzerinde yatar

2. $f(x, y) < 1$ ise (x, y) noktası süper elips içinde yatar
 3. $f(x, y) > 1$ ise (x, y) noktası süper elips dışında yatar.

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{r_x} \right)^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{y}{r_y} \right)^{\frac{2}{n}} = 1$$

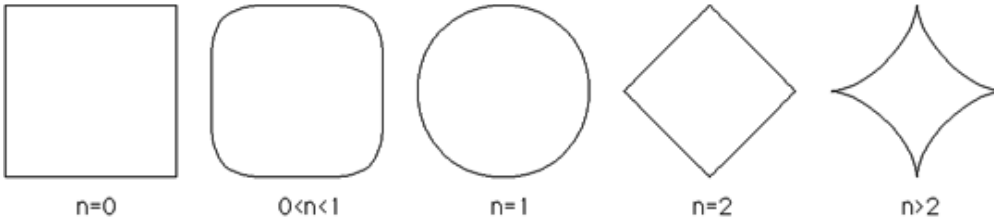
eşitliğinden y çekilerek ;

$$y = r_y \left(1 - \left(\frac{x}{r_x} \right)^{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

bulunur.

n değerini değiştirerek süper elipslerin şekilleri kontrol edilir. Bunlardan bazıları aşağıda tabloda verilmiştir.

n	r_x, r_y	Elde Edilen Şekil
0	-	Dikdörtgen
0	$r_x = r_y$	Kare
<1	-	Yuvarlatılmış Dikdörtgen
$=1$	-	Elips
$=1$	$r_x = r_y$	Çember
$=2$	-	Eşkenar Dörtgen
>2	-	Astroid
$\rightarrow \infty$	-	Artı İşareti



Şekil.10.3.11.2

Süper elipsler daima her bir bölgede n nin farklı değerlerine karşılık

$\phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}, \phi = \pi, \phi = \frac{3\pi}{2}$ değerlerindeki noktalardan geçer .

10.4.Kapalı Denklemlerle Verilen Eğrilerin İncelenmesi

Tanım: Bir eğrinin herhangi koordinat sistemindeki $F(x, y) = 0$ denklemi koordinatlardan birine göre çözülmiyorsa , bu denkleme eğrinin kapalı denklemi denir.

Tanım: $F(x, y) = 0$ şeklinde verilen eğri için $F(x, y)$ fonksiyonu x, y nin iki değişkenli polinomu ise eğriye **cebirsel eğri** ,diğer hallerde **Transandant (cebirsel olmayan) eğri** denir.

Tanım:Bir $F(x, y) = 0$ eğrisi için $F(x, y) = f(x, y)g(x, y)$ şeklinde yazılabiliyorsa eğriye **parçalanabilir eğri** denir .Bu durumda eğri $f(x, y) = 0$ ve $g(x, y) = 0$ denklemleri eğrilerin birleşiminden oluşur.

10.4.1Cebirsel Eğriler

Tanım:Cebirsel $F(x, y) = 0$ eğrisi için $F(x, y)$ polinomunun derecesine **cebirsel eğrinin derecesi** denir.

Cebirsel eğriler teorisinde pek fazla öneme sahip olan aşağıdaki teoremi vermek uygun olacaktır.

Teorem.10.4.1 (Bezout Teoremi): Ortak parçası bulunmayan n . ve p . dereceden iki cebirsel eğrinin tam $n.p$ – tane arakesit noktası vardır.

Buradaki arakesit noktaları sonlu (katlı veya sanal gibi) yada sonsuzdaki noktalar olabilir.

Teorem.10.4.2 : Eğer

$$F(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{(n-1)} x + \dots + a_{(n-1)} y x^{(n-1)} + a_n x^n$$

şeklinde homogen bir polinom ise; $F(x, y) = 0$ denklemi orijinden geçen tam $n - tane$ doğrunun birlikteki denklemidir.

İspat : $F(x, y) = 0$ denklemini x^n ile böldükten sonra $m = \frac{y}{x}$ alarak

$$F(x, y) = a_0 m^n + a_1 m^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)} m + a_n = 0 \quad (10.4.1.1)$$

denklemi bulunur. (10.4.1.1) denkleminde $a_0 \neq 0$ ise bu denklemin $n - tane$ sonlu $m_i, i = 1, \dots, n$ kökü vardır. Buna göre ; (10.4.1.1) denklemi

$$F(x, y) = a_0 (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_n) = 0$$

olur.

Buradan ;

$$y - m_i x = 0, i = 1, \dots, n$$

bulunur.

Eğer (10.4.1.1) denkleminde $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ ise denklemin köklerinden $m_1 = \infty$ ve buna karşılık gelen doğru da $x = 0$ olur.

Eğer (10.4.1.1) denkleminde $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0$ ise denklemin köklerinden $m_1 = \infty, m_2 = \infty$ ve bunlara karşılık gelen doğru da $x = 0$ olur.

Eğer (10.4.1.1) denkleminde $a_n = 0, a_{(n-1)} \neq 0$ ise denklemin köklerinden $m_n = 0$ ve buna karşılık gelen doğru da $y = 0$ olur.

Eğer (10.4.1.1) denkleminde $a_n = 0, a_{(n-1)} = 0, a_{(n-2)} \neq 0$ ise denklemin köklerinden $m_{(n-1)} = 0, m_n = 0$ ve bunlara karşılık gelen doğru da $y = 0$ olur Böylece denklem bütün hallerde $n - tane$ doğrudan oluşur.

$F(x, y) = 0$ şeklinde verilen eğri için;

$$F_x + F_y y' = 0$$

$$F_y \neq 0 \Rightarrow y' = \frac{-F_x}{F_y} \quad (10.4.1.2)$$

$$F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}(y')^2 + F_y y'' = 0$$

$$F_y \neq 0 \Rightarrow y'' = \frac{F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}(y')^2}{-F_y} \quad (10.4.1.3)$$

$$F_y \neq 0 \Rightarrow y'' = \frac{(F_y)^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_{yy}(F_x)^2}{-(F_y)^3}$$

eşitliklerini göz önüne alalım.

10.4.2.Kapalı Denklemli Eğrilerin Özel Noktaları ve Teğet Denklemleri

Tanım:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemini sağlayan her bir noktaya eğrinin bir **tekil** yada **singüler** noktası denir.

Tekil olmayan bir P noktasındaki teğet **doğrusunun eğimi**

$$y'|_P = \frac{-F_x|_P}{F_y|_P}$$

değerinden , **teğet ve normal doğrusunun denklemi** de sırasıyla

$P = (x_0, y_0)$ olmak üzere

$$(y - y_0) = \frac{-F_x|_P}{F_y|_P} (x - x_0) ,$$

$$(x - x_0)F_x|_P + (y - y_0)F_y|_P = 0$$

$$(y - y_0) = \frac{F_y|_P}{F_x|_P} (x - x_0)$$

$$(x - x_0)F_y|_P - (y - y_0)F_x|_P = 0$$

olur.

Tekil bir noktadaki teğet doğrusu tek değildir.

Eğer

$$(F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}) \neq (0, 0, 0)$$

ise , eğrinin en çok iki farklı teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrularının eğimleri ,

$$F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}(y')^2 = 0$$

denkleminden y' çözülerek bulunur. Buna göre ;

$$\Delta = 4((F_{xy})^2 - F_{xx}F_{yy})$$

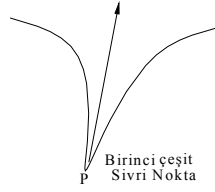
olmak üzere;

1. $\Delta > 0$ ise eğrinin iki farklı teğeti vardır. Bu durumda bu noktaya **Düğüm Noktası** denir.

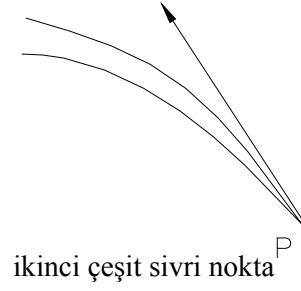


Şekil.10.4.1

2. $\Delta = 0$ ise eğrinin çakışık tek teğeti vardır. Eğer eğrinin kolları teğetin tek bir yanında kalıyorsa bu noktaya eğrinin **birinci cins sivri noktası** denir. Eğer eğrinin kolları teğetin her iki yanına doğru açılıyorsa bu noktaya eğrinin **ikinci cins sivri noktası** denir.



Şekil.10.4.2.



Şekil.10.4.3

$\Delta < 0$ ise eğrinin kolları sanaldır. Bu özellikteki noktalara **yalnız noktalar** denir.

Eğer

$$(F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}) = (0, 0, 0)$$

ve

$$(F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, F_{yyy}) \neq (0, 0, 0, 0)$$

ise eğrinin en çok üç farklı teğet doğrusu vardır. Bu teğetlerin eğimleri **(10.4.1.3)** denkleminin birincisinden türetilerek elde edilen ;

$$F_{xxx} + 3F_{xxy}y' + 3F_{xyy}(y')^2 + F_{yyy}(y')^3 = 0$$

denkleminde , y' çözülerek bulunur.

Eğer

$$(F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}) = (0, 0, 0)$$

ve

$$(F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, F_{yyy}) = (0, 0, 0, 0)$$

ise eğrinin en çok dört farklı teğet doğrusu vardır.

Bu yöntemle devam edilerek bir tekil noktadaki bütün teğet doğruları bulunur.

Tanım :

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

sistemini sağlayan her bir P noktası için

$$y''|_P = \frac{-F_{xx}|_P}{F_y|_P}$$

olmak üzere ; $y''|_P > 0$ ise P noktası eğrinin **minimum**, $y''|_P < 0$ ise **maximum** noktasıdır.

$$y''|_P = 0$$

ve

$$y''' = \frac{-F_{xxx}|_P}{F_y|_P} \neq 0$$

ise P noktası eğrinin **büküm** noktasıdır.

Yukarıda verilen tanıma göre kapalı denklemlle verilen bir eğrinin maximum ve minimum noktaları sırasıyla

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) \neq 0 \\ \frac{-F_{xx}}{F_y} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) \neq 0 \\ \frac{-F_{xx}}{F_y} > 0 \end{cases}$$

sistemlerinin çözümünden bulunur.

10.4.3.Cebirsel Eğrilerin Katlı Noktaları

$F(x, y) = 0$ denkleminin verilen n . dereceden bir eğrinin bir noktası $P = (x_0, y_0)$ olsun $P = (x_0, y_0)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{u} = (a, b)$ olan bir d doğrusunun, eğri ile arakesit noktalarını araştıralım. O zaman d doğrusunun parametrik denklemi ;

$$d \dots (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$$

veya

$$d \dots x = x_0 + \lambda a, y = y_0 + \lambda b$$

olur. Arakesit noktaları da ;

$$F(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) = 0$$

denkleminin her bir çözümünden elde edilen λ değerine göre belirlenir. $F(x, y) = 0$ n . dereceden bir eğri olduğundan $F(x, y)$ nin n den büyük türevlerinin hepsi sıfırdır. Buna göre ;

$$f(\lambda) = F(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$$

fonksiyonunu $\lambda = 0$ noktası civarında Taylor serisine açarak;

$$f(\lambda) = F(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$$

$$= F(x_0, y_0) + \lambda(aF_x|_P + bF_y|_P) + \frac{\lambda^2}{2}(a^2F_{xx}|_P + 2abF_{xy}|_P + b^2F_{yy}|_P) + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}(a^nF_x^n|_P + b^nF_y^n|_P)$$

olur. $P = (x_0, y_0)$ noktası eğri üzerinde olduğundan $F(x_0, y_0) = 0$ ve

$$F(x, y) = \lambda(aF_x|_P + bF_y|_P) + \frac{\lambda^2}{2}(a^2F_{xx}|_P + 2abF_{xy}|_P + b^2F_{yy}|_P) + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}(a^nF_x^n|_P + b^nF_y^n|_P) = 0$$

bulunur.

$$\bullet (aF_x|_P + bF_y|_P) \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

bu denklemin bir katlı köküdür. Eğer d doğrusu eğrinin teğeti değilse ; d doğrusu eğri ile aynı noktada 1 – defa kesişir. Eğer d doğrusu eğrinin teğeti ise

$$y'|_P = m = \frac{b}{a}$$

olduğu göz önünde tutularak; $(aF_x + bF_y)|_P = 0$ şeklinde bulunur. Yani bir eğrinin teğeti eğriyi tekil olmayan bir noktada birden fazla katlılıkla kesen tek doğrudur.

$$\bullet \quad (aF_x|_P + bF_y|_P) = 0, (a^2 F_{xx}|_P + 2abF_{xy}|_P + b^2 F_{yy}|_P) \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

bu denklemin iki katlı köküdür. d doğrusu eğrinin teğeti değil ise d doğrusu eğri ile aynı noktada 2 –defa kesişir.

Eğer d doğrusu eğrinin teğeti ise $y'|_P = m = \frac{b}{a}$ olacağından, daima

$$(a^2 F_{xx}|_P + 2abF_{xy}|_P + b^2 F_{yy}|_P) = a^2 (F_{xx}|_P + 2F_{xy}|_P y'|_P + F_{yy}|_P (y'|_P)^2) = 0$$

olur. Bu eğrinin teğetlerinin bir iki katlı noktada , eğriyi ikiden fazla katlılıkla kestiğini gösterir. Bu durumda eğrinin teğetlerinin birlikteki denklemi ,

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a}, a^2 F_{xx}|_P + 2abF_{xy}|_P + b^2 F_{yy}|_P = 0$$

eşitliklerinden a, b yok edilerek

$$(x - x_0)^2 F_{xx}|_P + 2(x - x_0)(y - y_0)F_{xy}|_P + (y - y_0)^2 F_{yy}|_P = 0$$

şeklinde bulunur.

$$\bullet \quad (aF_x|_P + bF_y|_P) = 0, (aF_x + bF_y)^2|_P = (aF_{xx}|_P + 2abF_{xy}|_P + b^2 F_{yy}|_P) = 0$$

$$, ..., (aF_x + bF_y)^{(k-1)}|_P = 0, (aF_x + bF_y)^{(k)}|_P \neq 0$$

eğer d doğrusu eğrinin teğeti değil ise $\lambda = 0$ bu denklemin $k -$ katlı köküdür Bu nedenle; d doğrusu eğri ile aynı noktada $k -$ defa kesişir.

Eğer d doğrusu eğrinin teğeti ise $F(x, y) = 0$ eşitliğinden türevler alıp

$$y'|_P = m = \frac{b}{a}$$

olduğu göz önünde tutularak ,

$$(aF_x + bF_y)^{(k)}|_P = 0$$

olduğu görülür .Yani;

bir $k -$ katlı noktada teğetler eğriyi k dan fazla katlılıkla kesen doğrulardır.

Özet olarak ; P noktasın ın $F(x, y) = 0$ eğrisinin $k -$ katlı noktası olması için gerek ve yeter şart $f(x, y)$ fonksiyonunun i . mertebeden kısmi türevleri $i \geq k - 1$, P noktasında sıfır olmalıdır.

Teorem.10.4.3.1: Cebirsel bir eğri koordinat sisteminin orijininden geçiyorsa ,orijinin katlılık mertebesi,denklem en düşük dereceli terimlerinin derecesine eşittir. Orijinden geçen eğrinin orijindeki teğetlerinin birlikteki denklemi en düşük dereceli terimler sıfıra eşitlenerek bulunur.

İspat:Cebirsel eğrinin en düşük dereceli teriminin derecesi $l \geq 1$ olsun. O zaman eğrinin denklemi

$$F(x, y) = \phi_m(x, y) + \phi_{(m-1)}(x, y) + \dots + \phi_{(l+1)}(x, y) + \phi_l(x, y) = 0, m \geq l$$

şeklinde homogen polinomların toplamı olarak yazılabilir. Orijinden geçen herhangi doğrunun denklemi , $\vec{u} = (a, b)$ doğrunun doğrultman vektörü olmak üzere;

$$x = \lambda a, y = \lambda b$$

olur.

Bu doğru ile bu eğrinin arakesit noktaları

$$\lambda^m \phi_m(a, b) + \lambda^{(m-1)} \phi_{(m-1)}(a, b) + \dots + \lambda^{(l+1)} \phi_{(l+1)}(a, b) + \lambda^l \phi_l(a, b) = 0, m \geq l$$

denklemin köklerinin belirlediği noktalarlardır. Bu denklemin köklerinden

$l -$ tanesi sıfır olduğundan orijin bu eğrinin $l -$ katlı noktasıdır. Bu

noktadaki teğetlerin hepsi belirsiz katsayılar nedeniyle $\phi_l(a, b) = 0$

denklemini sağlarlar. Yani; eğrinin orijindeki teğetlerinin birlikteki denklemi

$$\phi_l(x, y) = 0 \text{ olur.}$$

Teorem.10.4.3.2:Parçalanamayan üçüncü dereceden bir eğrinin birden fazla iki katlı noktası bulunamaz.

İspat: Üçüncü dereceden eğrinin iki tane farklı iki katlı noktası bulunduğunu kabul edelim. Bu noktalar P, Q olsun. O zaman $|PQ|$ doğru parçası eğriyi P de iki Q da da iki defa olmak üzere dört defa keser yani dört noktada keser. Bu ise eğri üçüncü dereceden olduğundan Bezout Teoreminden imkansızdır. Eğer $|PQ|$ doğru parçası eğrinin bir parçası ise yani eğri biri ikinci dereceden diğeri birinci dereceden iki çarpına ayrılıyorsa bu halde eğri bir konikle $|PQ|$ doğrusuna parçalanmış eğri olur.

Örnek:

$$\frac{x^3}{125} + \frac{x^2y}{100} + \frac{xy^2}{80} + \frac{xy}{64} - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} - \frac{x}{5} - \frac{y}{4} + 1 = 0$$

denklemlili verilen eğrinin iki katlı noktaları aranırsa yani

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \\ (F_{xx}(x, y), F_{xy}(x, y), F_{yy}(x, y)) \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

özelliğindeki noktalar aranırsa ; $P = (5, 0)$, $Q = (0, 4)$ noktaları bulunur. O halde bu eğri parçalanabilir. P, Q noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} - 1 = 0$$

olduğundan denklemin sol tarafı x in azalan kuvvetlerine göre düzenlenip

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} - 1$$

ifadesine bölünerek ,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1$$

bulunur .O halde eğri

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} - 1 = 0$$

doğru su ile

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$$

elipsine parçalanmış olur.

Teorem.10.4.3.3: İki katlı noktası bulunan üçüncü dereceden bir eğri ünükürsaldır.

İspat: İki katlı nokta P olsun .Eğri üçüncü dereceden olduğundan , P noktasından çizilen herhangi bir doğru eğriyi P de iki defa kestiğinden Bezout Teoremine göre bir üçüncü Q noktasında da keser. Buna göre

$P = (x_0, y_0)$ noktasından geçen herhangi doğrunun denklemi

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

olduğundan eğri ile bu doğrunun arakesit noktalarının apsisi

$$F(x, y_0 + t(x - x_0)) = 0$$

denkleminde elde edilir. Bu denklemin sol tarafı

$x - x_0$ göre üçüncü dereceden olup $(x - x_0)^2$ ile bölünebilir. Bölüm $x - x_0$

göre birinci dereceden olduğundan katsayılarıdaki t ancak rasyonel olarak bulunur. Eğer bölüm

$Ax + B$ ise A, B t nin rasyonel fonksiyonlarıdır. O zaman

$$F(x, y_0 + t(x - x_0)) = (x - x_0)^2 (Ax + B) = 0$$

olur. $P = (x_0, y_0)$ noktasından farklı noktanın apsisi

$$x(t) = \frac{-B(t)}{A(t)}$$

olur.

$$y(t) = y_0 - x_0 t - \frac{Bt}{A}$$

da ordinatıdır. Bu bize eğrinin global parametrik denklemini verir.

Özel olarak bu iki katlı nokta orijin ise üçüncü derece eğrinin denklemini homogen polinomlara göre yazarsak $\phi_3(x, y) + \phi_2(x, y) = 0$ olur. Bu eğriyi

orijinden geçen $y = tx$

doğrusu ile kesersek, kesişme noktalarının apsilerini veren denklem

$$\phi_3(x, tx) + \phi_2(x, tx) = 0$$

veya

$$x^3 \phi_3(1, t) + x^2 \phi_2(1, t) = 0$$

$$x^2 (x \phi_3(1, t) + \phi_2(1, t)) = 0$$

olur. Bu durumda; doğrunun eğriyi kestiği, orijinden farklı noktanın apsisi

$$x(t) = \frac{-\phi_2(1, t)}{\phi_3(1, t)}$$

ve ordinatı da ,

$$y(t) = \frac{-t \phi_2(1, t)}{\phi_3(1, t)}$$

olur. Böylece eğrinin global parametrik denklemi bulunmuş olur.

Teorem 10.4.3.4: $(n-1)$. mertebeden katlı noktası bulunan her n . dereceden eğri ünükürsaldır.

İspat: $(n-1)$. mertebeden katlı nokta orijin değil ise koordinat sisteminin orijinini bu noktaya öteleyebiliriz. Bu nedenle bu noktayı orijin almak genelliği bozmaz. O zaman eğrinin denklemi

$$\phi_n(x, y) + \phi_{(n-1)}(x, y) = 0$$

olur. Bu eğriyi orijinden geçen $y = tx$ doğrusu ile kesersek ,kesişme noktalarının apsilerini veren denklem

$$\phi_n(x, tx) + \phi_{(n-1)}(x, tx) = 0$$

veya

$$x^n \phi_n(1, t) + x^{(n-1)} \phi_{(n-1)}(1, t) = 0$$

veyahut ta

$$x^{(n-1)} (x \phi_n(1, t) + \phi_{(n-1)}(1, t)) = 0$$

olur. Buradan orijinin dışında bu denklemi sağlayan noktaların apsisi ,

$$x(t) = \frac{-\phi_{(n-1)}(1, t)}{\phi_n(1, t)}$$

ve ordinatı da

$$y(t) = \frac{-t \phi_{(n-1)}(1, t)}{\phi_n(1, t)}$$

olarak bulunur.

Örnek : $x^3(x-2y) - y(x^2 - y^2) = 0$

eğrisi dördüncü dereceden ve orijin bu eğrinin üç katlı noktasıdır. Bu nedenle; $y = tx$ ile eğriyi kesiştirip ,eğrinin global parametrik denklemini

$$x(t) = \frac{t(t^2 - 1)}{2t - 1}, y(t) = \frac{t^2(t^2 - 1)}{2t - 1}$$

şeklinde buluruz.

10.4.4.Homogen Koordinatlarda Kapalı Denklemli Eğriler

Homogen koordinatlarla verilen bir eğrinin denklemi

$$f(X, Y, Z) = 0$$

olsun. Eğer

$$\nabla f(X, Y, Z) = (f_X, f_Y, f_Z) \neq (0, 0, 0)$$

olan noktalar için bu eğrinin teğetinin homogen koordinatlardaki denklemi

$$Xf_X|_P + Yf_Y|_P + Zf_Z|_P = 0$$

biçiminde tanımlıdır.

$f(X, Y, Z) = 0$ homogen denklemiyle verilen eğrinin ister sonlu ister sonsuzda bulunan noktası $P = [(X_0, Y_0, Z_0)]$ olsun. Bu noktadan geçen

herhangi bir doğru d olsun. Bu doğrunun üzerinde bulunan herhangi değişken noktanın homogen koordinatları

$$[(X_0 + \lambda X, Y_0 + \lambda Y, Z_0 + \lambda Z)]$$

olur. Bu doğru ile eğrinin arakesit noktalarının λ parametre değerleri

$$g(\lambda) = f(X_0 + \lambda X, Y_0 + \lambda Y, Z_0 + \lambda Z) = 0 \text{ fonksiyonunu } \lambda = 0$$

noktası civarında Taylor serisine açarsak;

$$g(\lambda) = f(X_0, Y_0, Z_0) + \lambda(X(f_X|_P) + Y(f_Y|_P) + Z(f_Z|_P)) +$$

$$\frac{\lambda^2}{2}(X^2(f_{XX}|_P) + 2XY(f_{XY}|_P) + 2XZ(f_{XZ}|_P)) + 2YZ(f_{YZ}|_P) + Z^2(f_{ZZ}|_P) + \dots +$$

$$\frac{\lambda^n}{n!}(X(f_X) + Y(f_Y) + Z(f_Z))^{(n)}|_P + \dots$$

olur .

- Eğer

$$\nabla f(X, Y, Z) = (f_X, f_Y, f_Z) \neq (0, 0, 0)$$

ise bu denklemin bir tek $\lambda = 0$ kökü vardır

Yani doğru eğriyi P de bir kat keser. Bu halde doğrunun eğriyi P de iki kat kesmesi için

$$X(f_X|_P) + Y(f_Y|_P) + Z(f_Z|_P) = 0$$

olmalıdır. Yani P noktası bu noktadaki teğet üzerinde olmalıdır.

- Eğer

$$\nabla f(X, Y, Z)|_P = (f_X, f_Y, f_Z)|_P = (0, 0, 0)$$

ve $f(X, Y, Z)$ fonksiyonunun P noktasında , bütün $i < l$ mertebeden kısmi türevleri sıfır oluyorsa , P noktasına eğrinin l – **katlı noktası** denir.

$$f(X, Y, Z) = 0$$

eğrisinin homogenlik derecesi n ise $Z \neq 0$ olmak üzere;

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z} \quad f(x, y, 1) = F(x, y)$$

olarak,

$$f(X, Y, Z) = Z^n F(x, y)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının X, Y değişkenlerine göre türevini alırsak

$$f_X(X, Y, Z) = Z^{(n-1)} F_x(x, y)$$

$$f_Y(X, Y, Z) = Z^{(n-1)} F_y(x, y)$$

bulunur. Bu denklemlerden yararlanarak aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım:

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y, f_z) \neq (0, 0, 0)$$

özelliğine sahip noktalara eğrinin **adi noktaları** denir. Adi noktalar sonlu yada sonsuz olabilir.

Tanım:

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y, f_z) = (0, 0, 0)$$

özelliğine sahip noktalara eğrinin **tekil noktaları** denir. Tekil noktalar sonlu yada sonsuz olabilir

Tanım:

$$\begin{cases} f(X, Y, Z) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

sistemini sağlayan noktalara **eğrinin sonsuzdaki noktaları** denir.

Sonsuzdaki noktalar adi yada katlı noktalar da olabilir.

Eğer $f(X, Y, Z)$ fonksiyonunu Z nin artan kuvvetlerine göre yazarsak;

$$f(X, Y, Z) = \phi_n(X, Y) + \phi_{(n-1)}(X, Y)Z + \phi_{(n-2)}(X, Y)Z^2 + \dots + \phi_n(X, Y)Z^n + \dots +$$

olur.

$$f(X, Y, Z) = 0$$

eğrisinin sonsuzdaki noktaları

$$\begin{cases} \phi_n(X, Y) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

sisteminin çözümleridir. Eğer $\phi_n(X, Y)$ fonksiyonunun bir çarpanı $aX + bY$ ise bu eğrinin sonsuzdaki bir noktası

$$aX + bY = 0, Z = 0$$

sisteminin çözümüdür yani; $P = [(b, -a, 0)]$ dır.

Eğer

$$aX + bY, \phi_n(X, Y)$$

fonksiyonunun tek katlı çarpanı ise

$$\frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial X}, \frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial Y}$$

ifadelerini aynı anda bölemez bu nedenle de

$$\frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial X} \Big|_P, \frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial Y} \Big|_P$$

ifadeleri sıfır olamazlar ve bu durumda ,

P sonsuzdaki adi nokta olur.

$$\nabla f(X, Y, Z) \Big|_P = \left(\frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial X} \Big|_P, \frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial Y} \Big|_P, \phi_{(n-1)}(X, Y) \Big|_P \right)$$

bulunur. Buradan da sonsuzdaki P adi noktasında eğrinin teğet denklemi;

$$X \frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial X} \Big|_P + Y \frac{\partial \phi_n(X, Y)}{\partial Y} \Big|_P + Z \phi_{(n-1)}(X, Y) \Big|_P = 0$$

olarak bulunur. Bu denklemdeki ilk iki katsayı sıfır olmadığından bu doğru da sonsuzdaki doğru değildir yani sonlu doğrudur. Bu sonlu doğru eğriye sonsuzdaki noktada teğet olduğundan ;eğrinin bir eğik asimtotunun homogen denklemidir.

Eğer

$$aX + bY, \phi_n(X, Y) \text{ fonksiyonunun birden fazla katlı çarpanı ise } aX + bY$$

$$\frac{\partial \phi_n(X,Y)}{\partial X}, \frac{\partial \phi_n(X,Y)}{\partial Y}$$

ifadelerini aynı anda böler bu nedenle de

$$\frac{\partial \phi_n(X,Y)}{\partial X} \Big|_P = \frac{\partial \phi_n(X,Y)}{\partial Y} \Big|_P = 0$$

olur.

Eğer $aX + bY, \phi_{(n-1)}(X,Y)$

fonksiyonunu bölemiyorsa

$$\phi_{(n-1)}(X,Y) \Big|_P \neq 0$$

olup, P noktası yine eğrinin adi noktasıdır. Bu noktadaki teğetin denklemi

$$Z\phi_{(n-1)}(X,Y) \Big|_P = 0$$

veya $Z = 0$ bulunur. Bu ise eğrinin sonsuzdaki noktasında eğriye teğet olan doğrunun sonsuzdaki doğru olduğunu gösterir. Diğer bir deyişle eğrinin asimtotunun sonsuzdaki doğru olduğunu gösterir. Bu hali "eğrinin bu noktadaki asimtotu sonsuza atılmıştır" şeklinde özetleriz. Bu durumda, P noktası eğrinin parabolik kolunun ulaştığı noktadır.

Eğer $aX + bY, \phi_n(X,Y)$ fonksiyonunun birden fazla katlı çarpanı ve

$\phi_{(n-1)}(X,Y)$ fonksiyonunu tek katlı çarpanı ise ;

$$f_X(X,Y,Z) = \frac{\partial \phi_n(X,Y)}{\partial X} \Big|_P = 0$$

$$f_Y(X,Y,Z) = \frac{\partial \phi_n(X,Y)}{\partial Y} \Big|_P = 0$$

$$f_Z(X,Y,Z) = \phi_{(n-1)}(X,Y) \Big|_P = 0$$

olur. Yani P noktası eğrinin iki katlı noktasıdır. Bu noktadaki teğetlerin birlikteki homogen koordinatlardaki denklemi;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \phi_n(X,Y)}{\partial X^2} \Big|_P \right) X^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi_n(X,Y)}{\partial X \partial Y} \Big|_P \right) XY + \left(\frac{\partial^2 \phi_n(X,Y)}{\partial Y^2} \Big|_P \right) Y^2 + \\ & + 2 \left(\frac{\partial \phi_{(n-1)}(X,Y)}{\partial X} \Big|_P \right) XZ + 2 \left(\frac{\partial \phi_{(n-1)}(X,Y)}{\partial Y} \Big|_P \right) YZ + 2 \phi_{(n-2)}(X,Y) \Big|_P Z^2 = 0 \end{aligned}$$

olur.

Gerekli hesaplamalar yapılarak daha yüksek mertebeden katlı noktalarda da teğet doğrularının birlikteki denklemi bulunur.

Aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak vermek yararlı olacaktır.

Teorem.10.4.4.1: n . dereceden ve parçalanamayan bir eğri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ den fazla iki katlı noktaya sahip olamaz.

Teorem.10.4.4.2: n . dereceden ve parçalanamayan bir eğri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tane iki katlı noktaya sahip ise eğri ünükürsaldır.

Teorem10.4.4.3: n . dereceden , parçalanamayan ve ünükürsal olduğu bilinen bir eğri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tane iki katlı noktaya sahiptir.

10.4.5.Bazı Özel Cebirsel Eğriler

10.4.5.1.Genel İkinci Dereceden Eğriler

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (10.4.5.3.1.1)$$

Şeklindeki eğrilere , ikinci dereceden eğriler denir.

Bu tip denkleme sahip eğrilerin aşağıda da görüleceği gibi ; koordinat sistemini bir döndürüp bir öteleyerek kanonik formları elde edilir.

Koordinat sistemini döndürmenin denkleme etkisi :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik değerleri λ_1, λ_2 olsun. λ_1, λ_2 karakteristik değerlerine karşılık gelen birim ortogonal karakteristik vektörler $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ olsun.

$$R_\alpha = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2] \\ = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

olmak üzere ;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_\alpha \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

dönüşümü kullanılarak,

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha$$

$$E' = -D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

olmak üzere; (10.4.5.3.1.1) eşitliği ,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y + F = 0 \quad (10.4.5.3.1.2)$$

bulunur.

Koordinat sistemini ötelemenin denkleme etkisi :

$$h = \begin{cases} \frac{-D'}{\lambda_1}, \lambda_1 \neq 0 \\ 0, \lambda_1 = 0 \end{cases}, k = \begin{cases} \frac{-E'}{\lambda_2}, \lambda_2 \neq 0 \\ 0, \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (10.4.5.3.1.3)$$

olmak üzere ;

$$x' = x'' + h$$

$$y' = y'' + k$$

ötelemesi uygulanarak ,

$$\begin{aligned} D'' &= \lambda_1 h + D' = \begin{cases} 0, \lambda_1 \neq 0 \\ D', \lambda_1 = 0 \end{cases} \\ E'' &= \lambda_2 k + E' = \begin{cases} 0, \lambda_2 \neq 0 \\ E', \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ F' &= -\lambda_1 h^2 - \lambda_2 k^2 + F \end{aligned} \quad (10.4.5.3.1.4)$$

olmak üzere;

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2D''x'' + 2E''y'' + F' = 0 \quad (10.4.5.3.1.5)$$

denklemi elde edilir. Şimdi şu üç hali irdeleyelim.

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ olsun. λ_1, λ_2 değerlerinin her ikisi de aynı anda sıfır olamayacağından ; $\lambda_1 \neq 0$ veya $\lambda_2 \neq 0$ olabilir.

(i) $\lambda_1 \neq 0$ ise (10.4.5.3.1.4) eşitliğinin birincisinden ,

$$\lambda_1 x''^2 + 2E''y'' + F' = 0 \quad (10.4.5.3.1.6)$$

(ii) $\lambda_2 \neq 0$ ise (10.4.5.3.1.4) eşitliğinin ikincisinden ,

$$\lambda_2 y''^2 + 2D''x'' + F' = 0 \quad (10.4.5.3.1.7)$$

olur.

(10.4.5.3.1.6) da $E'' \neq 0$ ise

$$x''^2 + 2 \frac{E''}{\lambda_1} \left(y'' + \frac{F'}{E''} \right) = 0$$

eşitliğinde,

$$\tilde{x} = x''$$

$$\tilde{y} = y'' + \frac{F'}{2E''}$$

ötelemesini kullanarak,

$$\tilde{x}^2 + 2 \frac{E''}{\lambda_1} \tilde{y} = 0$$

bulunur. Bu son denklem $\tilde{x}O''\tilde{y}$ koordinat sisteminde bir parabol gösterir.

(10.4.5.3.1.6) da $E'' = 0$ ise

$$x''^2 + \frac{F''}{\lambda_1} = 0 \text{ iken}$$

$$\frac{F''}{\lambda_1} > 0 \text{ ise reel hiçbir nokta göstermez. Bu durumu denklemin}$$

bozulmuş parabol gösterdiğini söyleyerek belirtiriz.

$$\frac{F''}{\lambda_1} < 0 \text{ ise reel iki nokta gösterir. Bu durumu da denklemin}$$

bozulmuş parabol gösterdiğini söyleyerek belirtiriz.

(10.4.5.3.1.7) denklemi de benzer şekilde irdelenir.

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ iken yani λ_1, λ_2 değerlerinin her ikisi de aynı işaretli ise

(10.4.5.3.1.5) denklemi (10.4.5.3.1.4) eşitlikleri kullanılarak;

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + F' = 0 \quad (10.4.5.3.1.8)$$

şekline dönüşür

(i) $F' \neq 0$ iken

$$\frac{x''^2}{\left(-F'/\lambda_1\right)} + \frac{y''^2}{\left(-F'/\lambda_2\right)} = 1$$

olur.

Eğer F', λ_1 zıt işaretli ise denklem elips gösterir. Aynı zamanda

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

ise çember gösterir.

Eğer F', λ_1 aynı işaretli ise denklem reel hiçbir nokta göstermez. Bu durumu denklemin bozulmuş elips gösterdiğini belirterek izah ederiz.

(ii) $F' = 0$ iken

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$$

denklemi elde edilir ki bu sadece $x''O'y''$ koordinat sisteminin orijinini gösterir. Bu durumu da yine denklemin bozulmuş elips gösterdiğini belirterek açıklarız.

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ iken yani λ_1, λ_2 değerleri zıt işaretli ise (10.4.5.3.1.5)

denklemi (10.4.5.3.1.4) eşitlikleri kullanılarak;

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + F' = 0 \quad (10.4.5.3.1.8)$$

şekline dönüşür

(i) $F' \neq 0$ iken

$$\frac{x''^2}{\left(-F'/\lambda_1\right)} + \frac{y''^2}{\left(-F'/\lambda_2\right)} = 1$$

olur.

$-F'/\lambda_1, -F'/\lambda_2$ zıt işaretli olduğundan ;

denklem hiperbol gösterir.

(ii) $F' = 0$ ise ;

$$y''^2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} x''^2$$

veya

$$y'' = \pm \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}} x''$$

bulunur. Bu ise $x''O'y''$ koordinat sisteminin orijininde kesişen iki doğru gösterir. Bu durumu denklemin bozulmuş hiperbol gösterdiğini söyleyerek izah ederiz.

Böylece aşağıdaki teoremi ispat etmiş olduk.

Teorem.10.4.5.3

(10.4.5.3.1.1) denklemi

1. $\det M = 0$ ise parabol yada bozulmuş parabol
2. $\det M > 0$ ise elips yada bozulmuş elips
3. $\det M < 0$ ise hiperbol yada bozulmuş hiperbol gösterir.

10.4.5.2.Üçüncü Dereceden Özel Cebirsel Eğriler

• Kübik Parabol

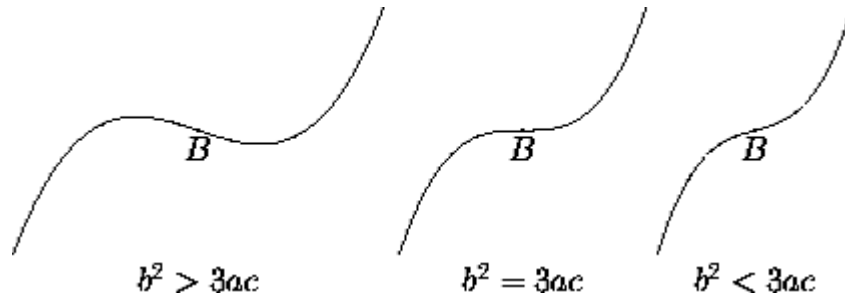
$$F(x, y) = ax^3 + bx^2 + cx - y + d = 0, a \neq 0$$

eğrisine **Genel Kübik Parabol** denir.

Bu eğrinin

$$B = \left(\frac{-b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} \right)$$

noktasına göre simetrik olduğu bir noktaya göre simetri tanımı kullanılarak gösterilebilir.

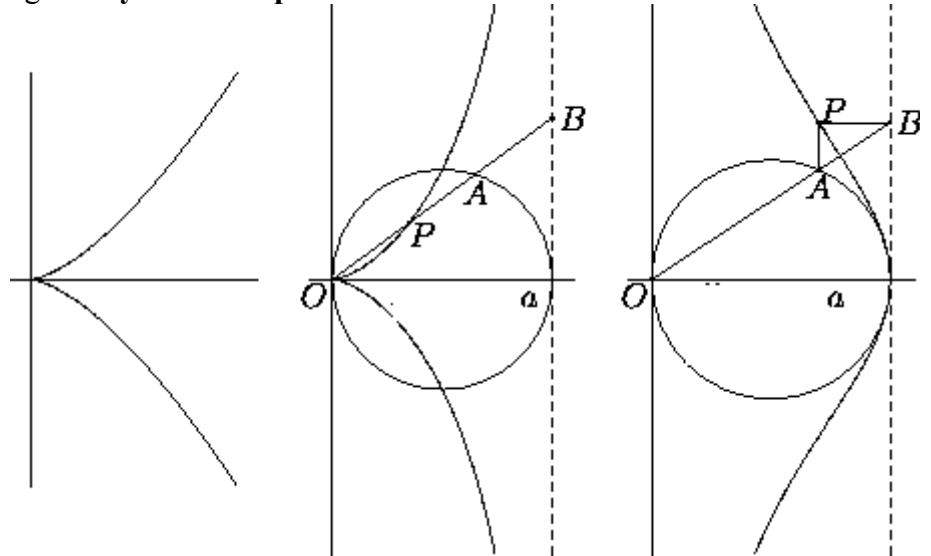


Şekil.10.4.4: $a > 0$ için Genel Kübik Parabol

- **Yarı-Kübik Parabol**

$$F(x, y) = y^2 - kx^3 = 0$$

eğrisine **yarı-kübik parabol** denir.



Şekil 10.4.5 : yarı kübik parabol ,kissoid, Agnesi Büyüsü

- **Diocles Kissioidi**

$$F(x, y) = (a - x)y^2 - x^3 = 0, a \neq 0$$

denklemlili eğriye Diocles kissioidi denir.

• **Agnesi Büyüsü**

$$F(x, y) = xy^2 - a^2(a - x) = 0$$

Dekart Yaprığı

$$F(x, y) = (x - a)y^2 + x^2\left(\frac{x}{3} + a\right) = 0$$

$$\begin{cases} F(x, y) = (x - a)y^2 + x^2\left(\frac{x}{3} + a\right) = 0 \\ F_x(x, y) = y^2 + 2ax + x^2 = 0 \\ F_y(x, y) = 2(x - a)y = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin tek çözümü $P = (0,0)$ ve

$$F_{xx}(x, y)|_P = (2a + 2x)|_P = 2a \neq 0$$

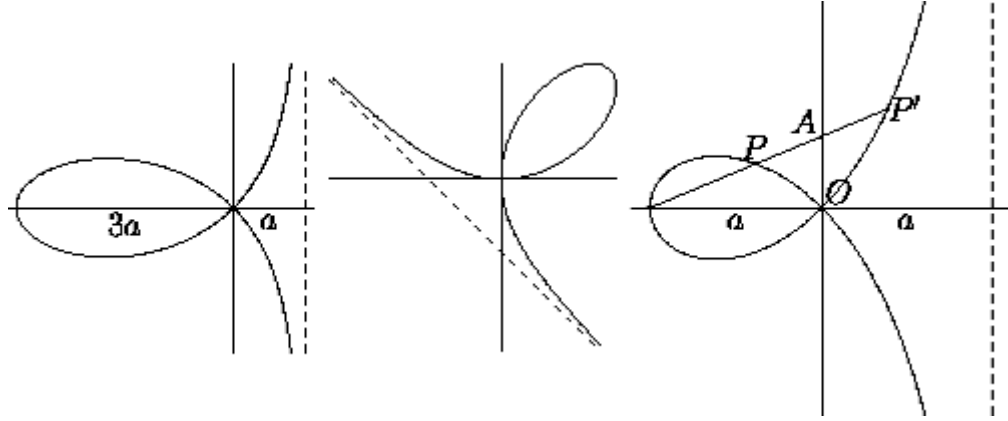
olduğundan P noktası iki katlı noktadır. Üçüncü dereceden bir cebirsel eğrinin bir iki katlı noktası varsa eğri ünükürsaldır. $y = tx$ alarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$x = \frac{3a(t^2 - 1)}{3t^2 + 1}$$

bulunur . Buna göre Dekart yaprağının parametrik denklemi

$$\alpha(t) = \left(\frac{3a(t^2 - 1)}{3t^2 + 1}, \frac{3at(t^2 - 1)}{3t^2 + 1} \right)$$

bulunur.



Şekil 10.4.6 : Dekart yaprağının iki hali ve Kayış eğrisi.

-
- **Kayış Eğrisi**

$$F(x, y) = (x - a)y^2 - x^2(a + x) = 0, a \neq 0$$

$$\begin{cases} F(x, y) = (x - a)y^2 - x^2(a + x) = 0 \\ F_x(x, y) = y^2 - 2ax - 3x^2 = 0 \\ F_y(x, y) = 2(x - a)y = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin tek çözümü $P = (0,0)$ ve

$$F_{xx}(x, y)|_P = (-2a - 6x)|_P = -2a \neq 0$$

olduğundan P noktası iki katlı noktadır. Üçüncü dereceden bir cebirsel eğrinin bir iki katlı noktası varsa eğri ünükürsaldir. $y = tx$ alarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$x = \frac{at^2 + a}{t^2 - 1}$$

bulunur. Buna göre kayış eğrisinin parametrik denklemi

$$\alpha(t) = \left(\frac{(at^2 + a)}{t^2 - 1}, \frac{t(at^2 + a)}{t^2 - 1} \right)$$

bulunur.

10.4.5.3.Dördüncü Dereceden Bazı Özel Eğriler

- **Cassini Ovali**

Aralarındaki uzaklık $2a$ olan F, F' gibi iki noktayı ve bir k sabitini göz önüne alalım.

$$|PF||PF'| = k^2$$

özelliğindeki P noktalarının oluşturduğu eğriye **Cassini Ovali** denir.

Eğer F, F' noktalarını X –ekseni üzerinde orijinden eşit uzaklıkta alarak eğrinin dik koordinatlardaki denklemini bulmak istersek;

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = k^4$$

bulunur.

(i) $\frac{k}{a} > 1$ ise eğri tek parçalı düzgün bir eğridir.

(ii) $\frac{k}{a} = 1$ ise eğri iki parçalı tek ilmik noktalı bir eğridir (Bernoulli

Lemniskatı) . Bu halde denklem ,

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

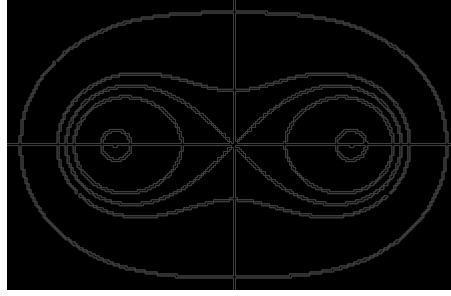
olur. Koordinat sistemini 45° döndürerek elde edilen yeni koordinat sistemindeki denklemi de

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2xy = 0$$

olur.

(iii) $\frac{k}{a} < 1$ ise eğri tek parçalı düzgün bir oval eğridir.

Her Cassini ovali dönel tor yüzeyi ile dönme eksenine paralel düzlemin arakesit eğrisidir.



Şekil 10.4.7: İçeriden dışarıya doğru $k = 5a, 9a, 1.1a, 1.5a$ özelliğindeki Cassini ovaleri burada $F = (a, 0), F' = (-a, 0)$

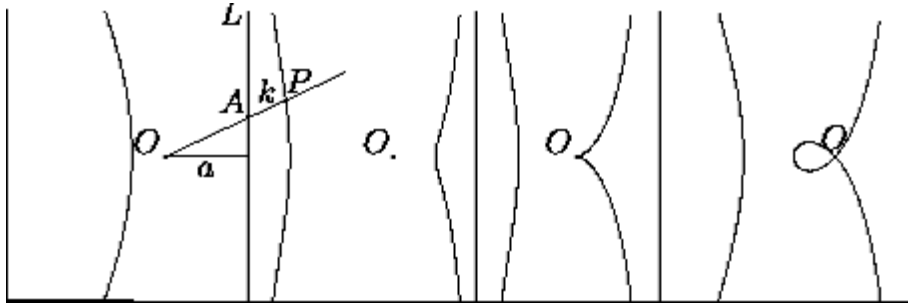
- **Nichomedes Konkoidi**

$$F(x, y) = (x - a)^2(x^2 + y^2) - k^2x^2 = 0$$

(i) $\frac{k}{a} > -1$ ise eğri tek parçalı düzgün bir eğridir.

(ii) $\frac{k}{a} = -1$ ise eğri sivri noktalıdır.

$\frac{k}{a} < -1$ ise eğri bir ilmiğe sahip eğridir.



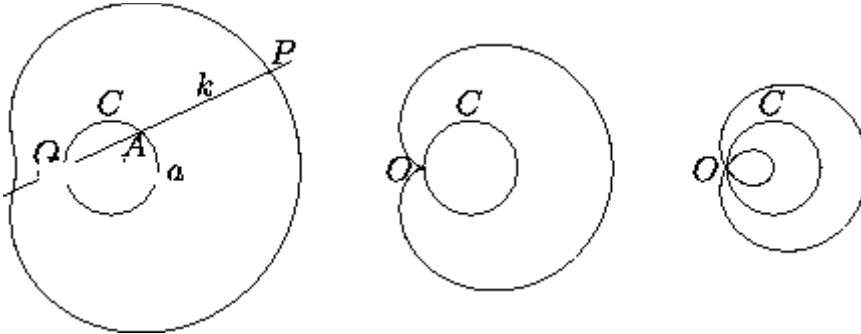
Şekil 10.4.8 : Soldan sağa $k = -5a, -a, -1.5a$ özelliğindeki Nichomedes Konkoidi

• **Pascal Limaçonu**

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - ax)^2 - k^2(x^2 + y^2) = 0$$

(i) $k = a$ iken **kardioid**

(ii) $a = \frac{k}{2}$ iken **trisekt**



Şekil.10.4.9 : Soldan sağa $k = 1.5a, a, 0.5a$ Paskal limaçonu

10.5.Bir Eğriden Türetilmiş Eğriler

10.5.1.Bir Eğriye Paralel Eğri

Tanım :

Bir α düzgün eğrisinin değişken P noktasındaki normal doğrusu üzerinde bulunan ve P noktasına uzaklığı $\pm k$ birim olan noktaların oluşturduğu eğriye, α eğrisine k birim uzaklıktaki paralel eğri denir .

Bu tanıma göre ;

$$P = (x(t), y(t)) = \alpha(t)$$

$$\vec{T} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{\alpha}(t)$$

$$\vec{N} = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$$

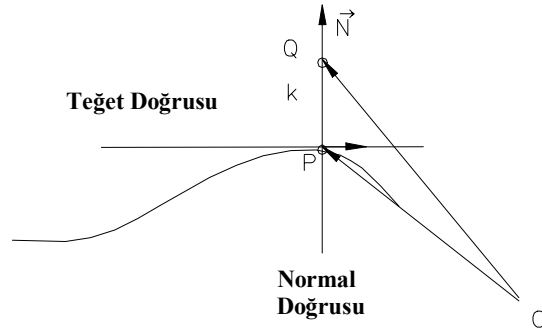
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O\alpha(t)} + \alpha(t)\vec{Q}$$

$$\alpha(t)\vec{Q} = \pm k\vec{N}$$

$$\beta(t) = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O\alpha(t)} + \pm k\vec{N}$$

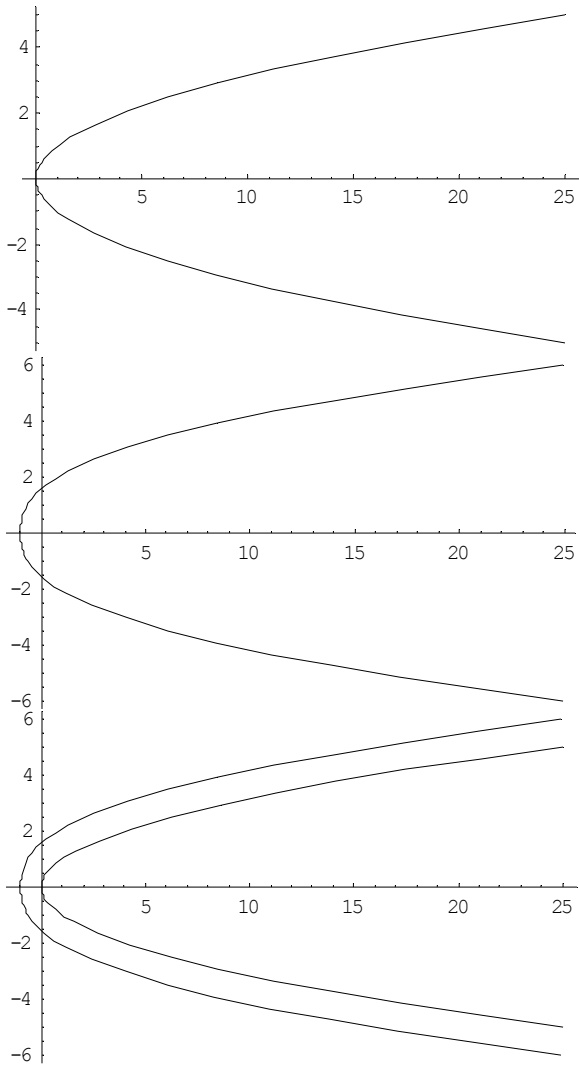
$$\beta(t) = \left(x(t) \mp \frac{k\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, y(t) \pm \frac{k\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right)$$

paralel eğrinin parametrik denklemi olur.



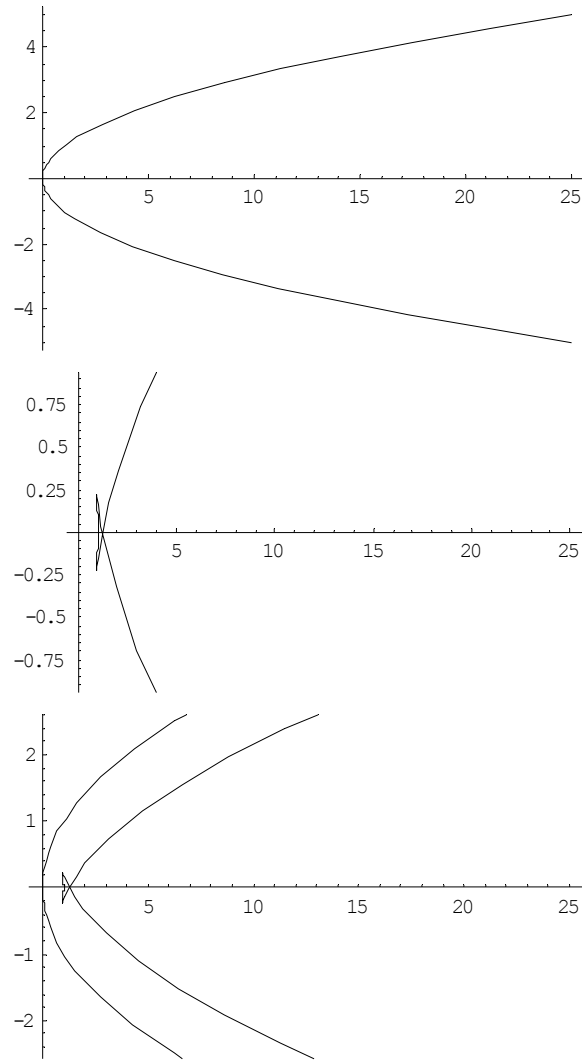
Şekil.10.5.1

Örnek 1: $k = 1$



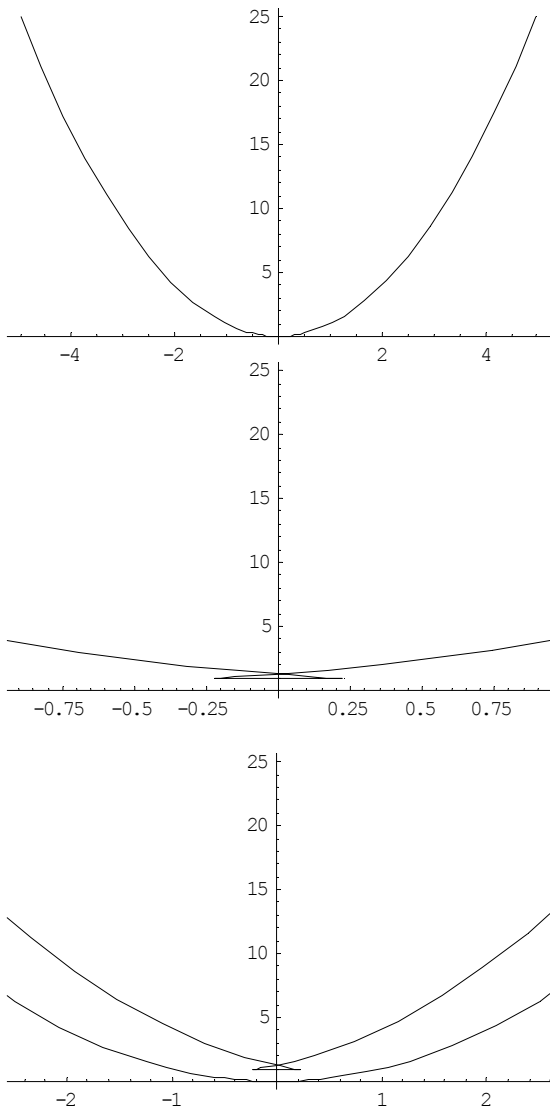
Şekil.10.5.2

Örnek 2: $k = -1$



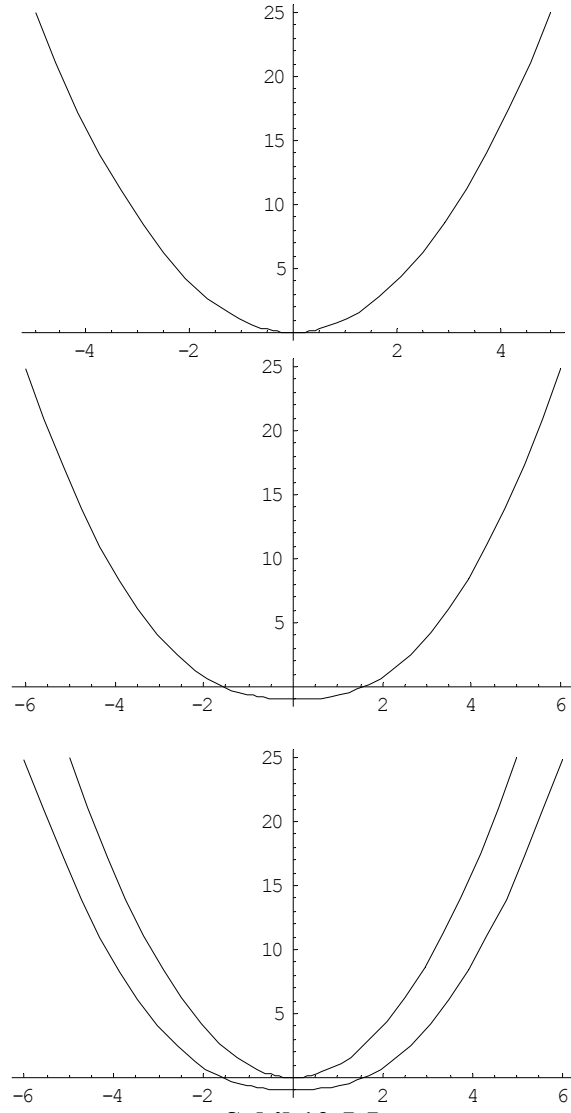
Şekil.10.5.2

Örnek 3 : $k = 1$



Şekil.10.5.4

Örnek 4 : $k = -1$



Şekil.10.5.5

10.5.2.Bir Eğrinin İncersiyon(Evirtim) Eğrisi

Tanım: Bir α eğrisinin incersiyon dönüşümü altındaki görüntüsüne α eğrisinin incersiyon eğrisi denir.

Bu tanıma göre incersiyon merkezi (x_0, y_0) ve incersiyon katsayısı

k olan incersiyon altında

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

eğrisinin görüntüsü $\beta(t)$ olmak üzere ;

$$\beta(t) = \left(x_0 + \frac{k(x(t) - x_0)}{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}, y_0 + \frac{k(y(t) - y_0)}{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \right)$$

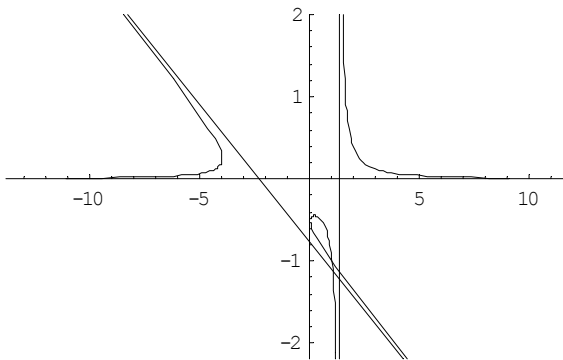
şeklindedir.

Örnek : $(x_0, y_0) = (1, 0), k = 1$ olsun.

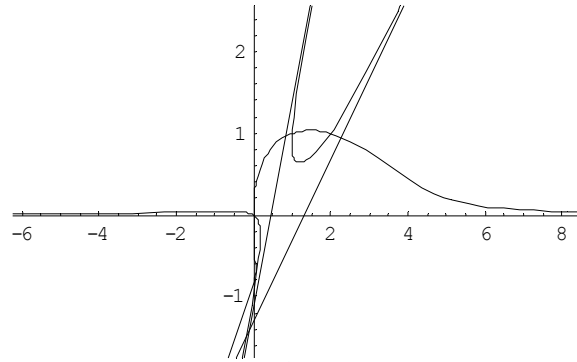
$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{1+t}, \frac{1}{(1+t)(t-2)} \right)$$

eğrisinin incersiyon eğrisi ,

$$\beta(t) = \left(\frac{(t^2 - t - 1)(1+t)(t-2)^2}{(t^2 - t - 1)^2(t-2)^2 + 1}, \frac{(1+t)(t-2)}{(t^2 - t - 1)^2(t-2)^2 + 1} \right)$$



10.5.6.Esas Eğri



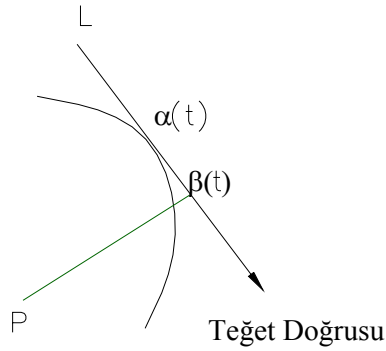
10.5.7.İncersiyon Eğrisi

- Bir eğrinin asimtotu incersiyon eğrisinin teğetidir.

10.5.3. Bir Eğrinin Pedal Eğrileri

Tanım: Sabit bir P noktasından bir α eğrisinin teğetlerine indirilen dikme ayaklarının oluşturduğu eğriye P noktasına göre α eğrisinin **birinci pozitif pedal eğrisi** denir.

Tanım: Sabit bir P noktasını göz önüne alalım. α eğrisinin değişken Q noktasından geçen ve $\overrightarrow{PQ}$ vektörüyle dik açı yapan doğrunun zarfına, P noktasına göre α eğrisinin **birinci negatif pedal eğrisi** denir.



Şekil.10.5.8

Bu tanıma göre α eğrisine $Q = \alpha(t)$ noktası eğrinin regüler noktası olmak üzere eğriye teğet olan L doğrusunun denklemi ;

$$y - y(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}(x - x(t)), \dot{x}(t) \neq 0$$

olacağı açıktır. $P = (x_0, y_0)$ noktasından geçen ve L doğrusuna dik olan doğrunun denklemi de

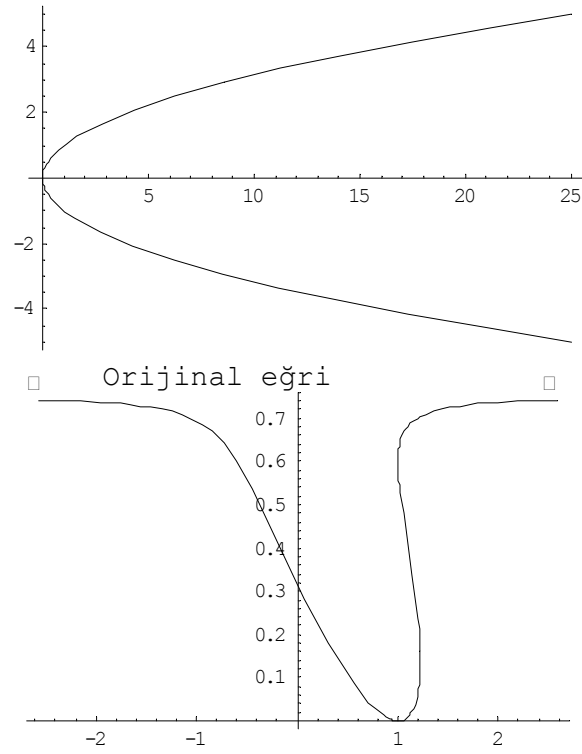
$$y - y(t) = \frac{-\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}(x - x(t)), \dot{y}(t) \neq 0$$

olur. Bu eşitliklerden ;

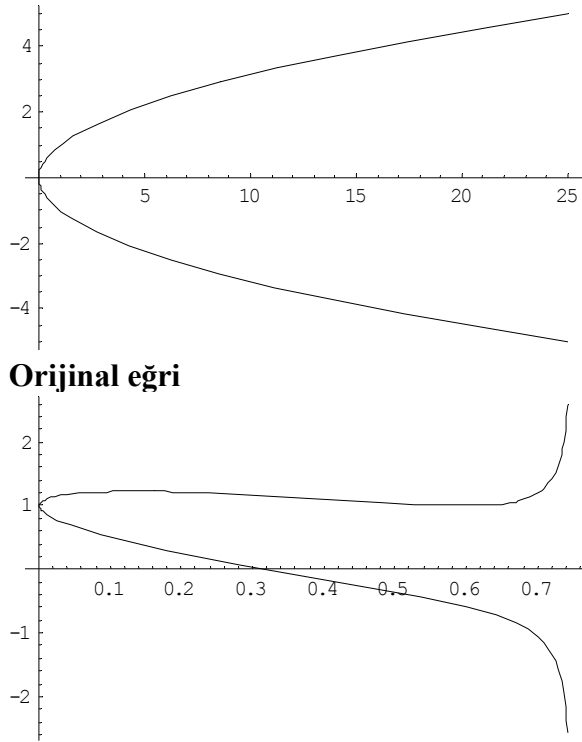
$$\beta(t) = \left(\frac{x_0 \dot{x}^2(t) + x(t) \dot{y}^2(t) + \dot{x}(t) \dot{y}(t) (y_0 - y(t))}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}, \frac{y(t) \dot{x}^2(t) + y_0 \dot{y}^2(t) + \dot{x}(t) \dot{y}(t) (x_0 - x(t))}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right),$$

$\dot{x}(t) \neq 0 \neq \dot{y}(t)$

bulunur.



Şekil.10.5.9.Pedal Eğrisi



Şekil.10.5.10.Pedal eğrisi

Teorem: Bir α eğrisinin pozitif pedal eğrisi β ise α eğrisi de β eğrisinin negatif pedal eğrisidir.

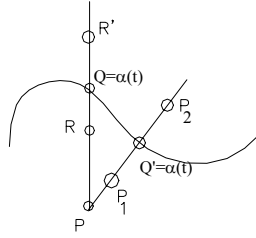
İspatsız olarak verdiğimiz bu teoremden , negatif pedal eğrisini ayrıca incelemeye gerek olmadığını görürüz.

10.5.4. Bir Eğrinin Konkoid Eğrisi

Tanım :

$P = (x_0, y_0)$ bir nokta , d de P den geçen ve α eğrisi ile $Q = \alpha(t)$ noktasında kesişen doğru olsun. k herhangi sabit olmak üzere ;

$\|\overrightarrow{P_1Q}\| = \|\overrightarrow{P_2Q}\| = k$ özelliğindeki P_1, P_2 noktalarının belirlediği eğriye α eğrisinin **Konkoid Eğrisi** denir.



Şekil.10.5.11

Yukarıdaki tanımdan; d doğrusunun denklemi

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x(t) - x_0, y(t) - y_0)$$

şeklinde olur. R d doğrusu üzerindeki $\|\overrightarrow{RQ}\| = k$ olacak şekildeki değişken nokta olmak üzere;

$$\overrightarrow{RQ} = \lambda \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \|\overrightarrow{RQ}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{PQ}\|$$

$$\Rightarrow k = |\lambda| \|\overrightarrow{PQ}\|$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\pm k}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

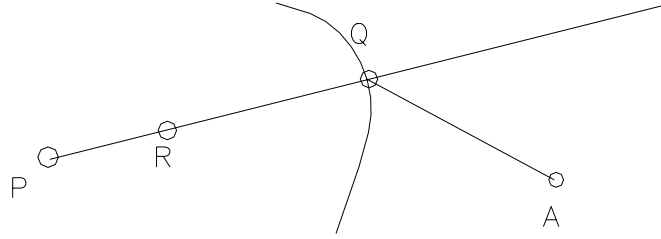
$$\beta(t) = \left(x(t) \mp \frac{k(x(t) - x_0)}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}}, y(t) \pm \frac{k(y(t) - y_0)}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}} \right)$$

olur.

10.5.5.Bir Eğrinin Kayış (stropoid) Eğrisi

Tanım: P, A sabit iki nokta α da bir eğri olsun.

$$\|\overrightarrow{QA}\| = \|\overrightarrow{RQ}\| = \|\overrightarrow{QR'}\|$$



Şekil.10.5.12

olacak şekildeki P noktasından geçen ve α eğrisini Q da kesen d doğrusu üzerindeki R

(veya R') noktalarının oluşturduğu eğriye P, A ya göre α eğrisinin **Kayış (Stropoid)eğrisi** denir.

Bu tanıma göre ; $P = (x_0, y_0), A = (x_1, y_1), Q = (x(t), y(t)) = \alpha(t), P \neq Q$ olmak üzere; P, Q dan geçen doğrunun denklemi,

$$y - y(t) = \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} (x - x(t))$$

olur. Buna göre ;

$$\overrightarrow{QA} = (x_1 - x(t), y_1 - y(t))$$

$$\overrightarrow{RQ} = (x(t) - x, y(t) - y) \overrightarrow{RQ} = (x(t) - x, y(t) - y)$$

$$\|\overrightarrow{QA}\|^2 = (x_1 - x(t))^2 + (y_1 - y(t))^2$$

$$\|\overrightarrow{RQ}\|^2 = (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2$$

$$\|\overrightarrow{QA}\|^2 = \|\overrightarrow{RQ}\|^2 \Rightarrow (x_1 - x(t))^2 + (y_1 - y(t))^2 = (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2$$

olur.

$$y(t) - y = -\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} (x - x(t))$$

yazılabilir. Bu son eşitliği önceki eşitlikte yerine yazarsak;

$$(x(t) - x)^2 = \frac{(x_1 - x(t))^2 + (y_1 - y(t))^2}{1 + \left(\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}\right)^2}$$

veya

$$(x(t) - x) = \pm \sqrt{\frac{(x_1 - x(t))^2 + (y_1 - y(t))^2}{1 + \left(\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}\right)^2}}$$

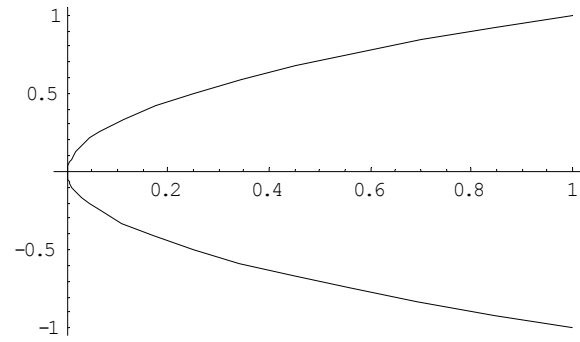
$$x = x(t) \pm \sqrt{\frac{(x_1 - x(t))^2 + (y_1 - y(t))^2}{1 + m^2}}$$

$$y = y(t) \pm \sqrt{\frac{(x_1 - x(t))^2 + (y_1 - y(t))^2}{1 + m^2}}$$

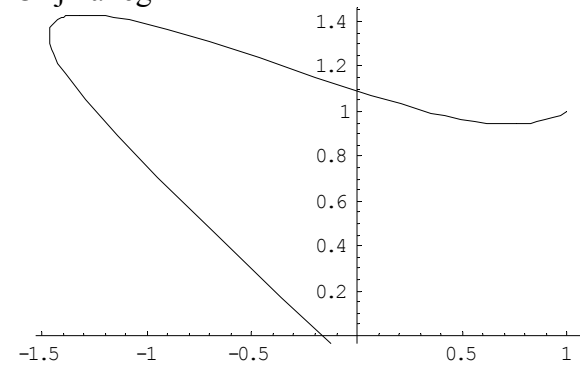
bulunur.

Örnek: $\alpha(t) = (t, t^2)$ parabolünün kayış eğrisini bulalım.

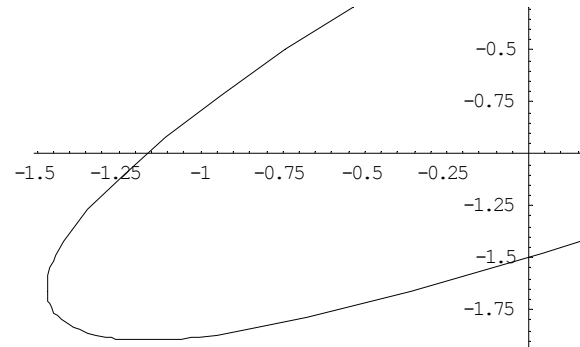
k :



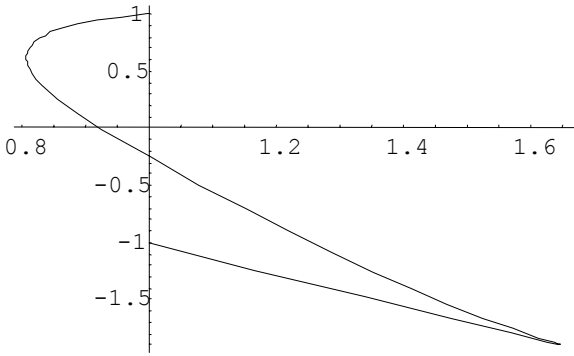
Orijinal eğri



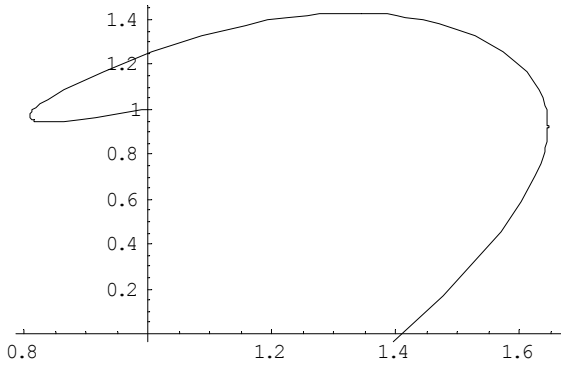
parça 1



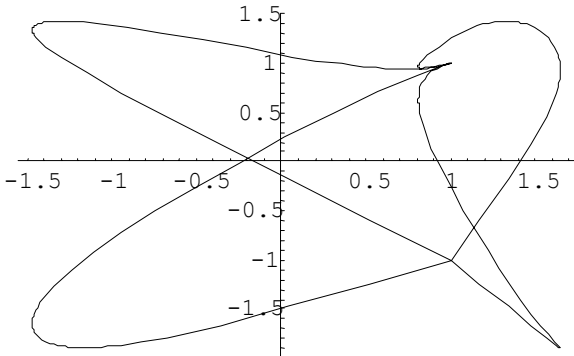
parça 2



parça 3



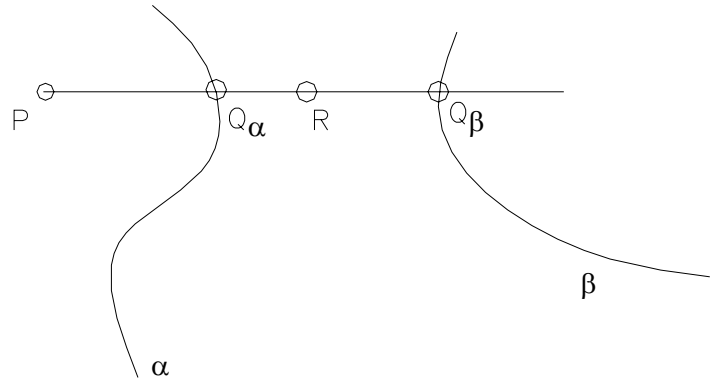
parça 4



Şekil.10.5.12.Kayış eğrisi

10.5.6. Bir Eğrinin Kissioid Eğrisi

Tanım : α, β gibi iki eğri ve sabit bir $P = (x_0, y_0)$ noktası verilsin. Bir d doğrusunun α, β eğrileriyle arakesit noktaları sırasıyla Q_α, Q_β olsun $\vec{PR} = \vec{Q_\alpha Q_\beta}$ olacak şekildeki R noktalarının oluşturduğu eğriye α, β eğrilerinin $P = (x_0, y_0)$ noktasına göre kissioid eğrisi denir.



Şekil.10.5.14. Kissioid

Bu tanıma göre ; $P = (x_0, y_0)$ ve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ noktalarından geçen d doğrusunun parametrik denklemi,

$$(x, y) = (x(t), y(t)) + v(x(t) - x_0, y(t) - y_0)$$

ve d ile β eğrisinin arakesit noktası

$$x(s) = x(t) + v(x(t) - x_0)$$

$$y(s) = y(t) + v(y(t) - y_0)$$

olur.

$$\Delta x = (x(t) - x_0), \Delta y = (y(t) - y_0)$$

olmak üzere;

$$x(s) - x(t) = v\Delta x$$

$$y(s) - y(t) = v\Delta y$$

$$x(s)\Delta y - x(t)\Delta y = v\Delta x\Delta y$$

$$y(s)\Delta x - y(t)\Delta x = v\Delta y\Delta x$$

eşitliklerinden ,

$$(x(t) - x(s))\Delta y + (y(s) - y(t))\Delta x = 0$$

$$y(s)\Delta x - x(s)\Delta y = y(t)\Delta x - x(t)\Delta y$$

denklemini $s = \sigma(t)$ çözümüne sahip ise ,

$$Q_\beta = (x(\sigma(t)), y(\sigma(t)))$$

ve

$$x = x_0 + x(\sigma(t)) - x(t)$$

$$y = y_0 + y(\sigma(t)) - y(t)$$

kissioid eğrisinin parametrik denklemini olur.

Örnek:

$\alpha(t) = (t^2, t)$, $\beta(s) = (s, s^2)$, $P = (1,1)$ olmak üzere α, β eğrilerinin P noktasına göre kissioid eğrisini bulalım.

$$y(s)\Delta x - x(s)\Delta y = y(t)\Delta x - x(t)\Delta y$$

eşitliğinden

$$s^2(t^2 - 1) - s(t - 1) = t(t + 1) - t^2$$

ve buradan da

$$s = \frac{(t - 1) \pm |t - 1|2t + 1}{2(t^2 - 1)}$$

bulunur. Genelliği bozmayacağından

$$s = \frac{(t - 1) + |t - 1|2t + 1}{2(t^2 - 1)}, -1 \neq t \neq 1$$

alalım. Buna göre ;

$$s = \sigma(t) = \begin{cases} 1, t \leq -1/2 \\ \frac{-t}{1+t}, -1/2 < t < 1 \\ 0, t = 1 \\ 1, t > 1 \end{cases}$$

ve

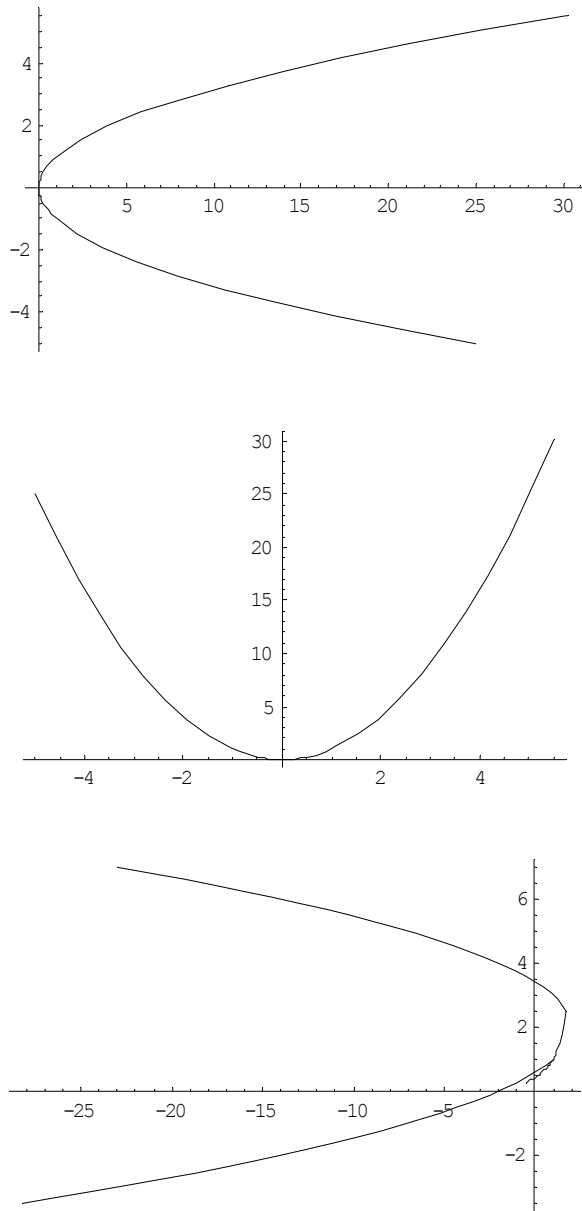
$$x(\sigma(t)) = \begin{cases} 1, t \leq -1/2 \\ \frac{-t}{1+t}, -1/2 < t < 1 \\ 0, t = 1 \\ 1, t > 1 \end{cases}$$

$$y(\sigma(t)) = \begin{cases} 1, t \leq -1/2 \\ \frac{t^2}{(1+t)^2}, -1/2 < t < 1 \\ 0, t = 1 \\ 1, t > 1 \end{cases}$$

ve Kissioid eğrisinin parametrik denklemi de

$$R(t) = \begin{cases} (2-t^2, 2-t), t \leq -1/2 \\ \left(\frac{1-t^2-t^3}{1+t}, \frac{1+t-t^3}{(1+t)^2} \right), -1/2 < t < 1 \\ (1-t^2, 1-t), t = 1 \\ (2-t^2, 2-t), t > 1 \end{cases}$$

olur.



Şekil.10.5.15

Sonuç: β eğrisi $ax + by + c = 0$ şeklinde verilmiş ise $a\Delta x + b\Delta y \neq 0$

ise kissioidin denklemi;

$$R(t) = \left(\frac{b(x_0 - \Delta x)\Delta y - (a\Delta x + by_0 + c)\Delta x}{a\Delta x + b\Delta y}, \frac{a(y_0 - \Delta y)\Delta x - (b\Delta y + ax_0 + c)\Delta y}{a\Delta x + b\Delta y} \right)$$

kissioidin parametrik denklemi olur.

Tanım: Bir parametrelî eğri ailesinin her bir üyesine teğet olan doğruya bu **eğri ailesinin zarfı** denir.

10.5.7. Bir Eğrinin Eğriliği , Eğrilik Yarıçapı Ve Eğrilik Merkezi

Her ne kadar analitik geometrinin direkt konusu olmasa da eğrilik kavramına bağlı eğriler türetileceğinden , burada eğrilikten kısaca bahsetmek istiyoruz.

Bir doğru (genellikle koordinat sisteminin X – eksenini) baz alınarak, eğrinin teğet doğrusunun baz doğrusuna göre eğimi ve eğrinin yay uzunluğuna bağlı olarak tanımlanan kavram eğriliktir.

10.5.8. Bir Eğrinin Eğrilik Fonksiyonu

Tanım: α parametrik eğrisinin teğetinin X – eksenini ile yaptığı açı ϕ ve α eğrisinin yay parametresi de s olmak üzere;

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

değerine α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.

Eğer eğri $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilmiş ise

$$\kappa = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$$

Eğer eğri $\rho = f(\theta)$ denklemiyle verilmiş ise

$$\kappa = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

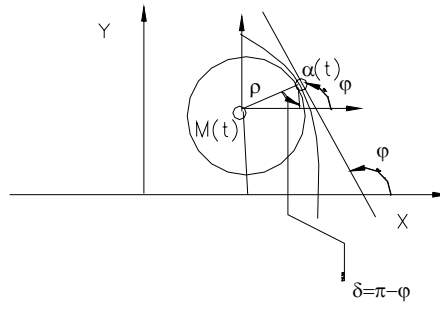
olarak tanımlanır.

Tanım:

$$\frac{1}{|\kappa|} = \left| \frac{ds}{d\phi} \right| = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} \right|$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik yarıçap fonksiyonu denir.

10.5.9. Bir Eğrinin Evolütü (Eğrilik Merkezi Eğrisi)



Şekil.10.5.16

Şekil.10.5.16 dan

$$\sin \delta = \sin(\pi - \varphi) = \frac{x(t) - X(t)}{\rho}$$

$$\cos \delta = \cos(\pi - \varphi) = \frac{y(t) - Y(t)}{\rho}$$

ve bu eşitliklerden

$$X(t) = x(t) - \rho \cos \varphi$$

$$Y(t) = y(t) + \rho \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}}$$

ve

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} = \left| \frac{ds}{d\phi} \right| = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y} \right|$$

değerleri yerine konursa

$$X(t) = x(t) - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}$$

$$Y(t) = y(t) + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}$$

ve

$$\gamma(t) = \left(x(t) - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}, y(t) + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y} \right)$$

eğrilik merkezi eğrisinin parametrik denklemi bulunur.

Tanım:

Yukarıdaki eğrilik merkezi eğrisine α eğrisinin **evolütü** denir.

Tanım: Bir d doğrusu α eğrisi üzerinde teğet olarak kaymadan yuvarlanırken d doğrusu üzerindeki sabit bir noktanın çizdiği eğriye α **eğrisinin involütü** denir.

- Bir β eğrisi α eğrisinin involütü ise α eğrisi de β eğrisinin evolütü olur.

10.5.10. Bir Eğrinin İzoptik Eğrisi

Tanım:

Bir α eğrisinin sabit θ açısı altında kesişen teğetlerinin arakesit noktalarının oluşturduğu eğriye α eğrisinin **İzoptik Eğrisi** denir. Eğer

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ise izoptiğe α eğrisinin **ortoptik eğrisi** denir.

Bu tanıma göre ; $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ regüler eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğetinin eğimi m_1 olmak üzere;

$$Y - y(t) = m_1 (X - x(t))$$

teğetin denklemleri olur.

m_2 bir başka teğetin eğimi iken , bu eğimle m_1 arasındaki ilişki

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

veya

$$m_2 = \frac{m_1 + \tan \theta}{1 - m_1 \tan \theta}$$

olur. Buradan;

$$m_1 = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

alın ,

$$m_2 = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{\dot{y}(t) + \dot{x}(t) \tan \theta}{\dot{x}(t) - \dot{y}(t) \tan \theta}$$

denklemden t_0 çözülerek elde edilen α eğrisi üzerindeki

$P = (x(t_0), y(t_0))$ noktasındaki eğimi m_2 olan teğetinin denklemleri ;

$$Y - y(t_0) = m_2 (X - x(t_0))$$

olduğundan , bu iki denklemden X, Y çözülürse

$$\eta_{\theta}(t) = \left(\frac{(y(t) - m_1 x(t) - y(t_0))(1 - m_1 \tan \theta) + (m_1 + \tan \theta)x(t_0)}{(1 + m_1^2) \tan \theta}, \frac{-m_1(1 - m_1 \tan \theta)y(t_0) + (m_1 + \tan \theta)(y(t) - m_1(x(t) - x(t_0)))}{(1 + m_1^2) \tan \theta} \right)$$

veya

$$\eta_{\theta}(t) = \left(\frac{(y(t) - m_1 x(t) - y(t_0))(\cos \theta - m_1 \sin \theta) + (m_1 \cos \theta + \sin \theta)x(t_0)}{(1 + m_1^2) \sin \theta}, \frac{-m_1(\cos \theta - m_1 \sin \theta)y(t_0) + (m_1 \cos \theta + \sin \theta)(y(t) - m_1(x(t) - x(t_0)))}{(1 + m_1^2) \sin \theta} \right)$$

denklemini izoptik eğrisinin parametrik denklemini olur.

Yukarıdaki eşitlikten $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınarak,

$$\eta_{\theta}(t) = \left(\frac{-m_1(y(t) - m_1 x(t) - y(t_0)) + x(t_0)}{(1 + m_1^2)}, \frac{m_1^2 y(t_0) + (y(t) - m_1(x(t) - x(t_0)))}{(1 + m_1^2)} \right)$$

α eğrisinin ortoptik eğrisinin parametrik denklemini bulunur.

Örnek: $\alpha(t) = (t, t^2)$ eğrisinin $\theta = \frac{\pi}{4}$ açısı altında kesişen teğetlerinin

oluşturduğu izoptik eğrisinin parametrik denklemini bulalım.

$$\frac{2t_0}{1} = \frac{2t+1}{1-2t}$$

$$t_0 = \frac{2t+1}{2(1-2t)}$$

ve

$$x(t_0) = \frac{2t+1}{2(1-2t)}$$

$$y(t_0) = \left(\frac{2t+1}{2(1-2t)} \right)^2$$

değerlerini izoptik eğri denkleminde yerine yazıp gerekli kısaltmaları yaparak;

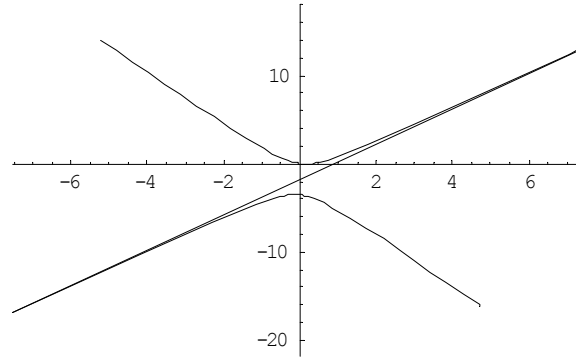
$$X(t) = \frac{-4t^2 + 4t + 1}{4(1-2t)}$$

$$Y(t) = \frac{6t^2 + t}{2(1-2t)}$$

izoptiğin parametrik denklemleri olur. Yani ;

$$\eta_{\frac{\pi}{4}}(t) = \left(\frac{-4t^2 + 4t + 1}{4(1-2t)}, \frac{6t^2 + t}{2(1-2t)} \right)$$

olur.



Şekil.10.5.17

Örnek: $\alpha(t) = (t, t^2)$ eğrisinin ortoptik eğrisinin parametrik denklemleri bulalım.

$$\frac{2t_0}{1} = \frac{-1}{2t}$$

$$t_0 = \frac{-1}{4t}$$

ve

$$x(t_0) = \frac{-1}{4t}$$

$$y(t_0) = \frac{1}{16t^2}$$

değerlerini izoptik eğri denkleminde yerine yazıp gerekli kısaltmaları yaparak;

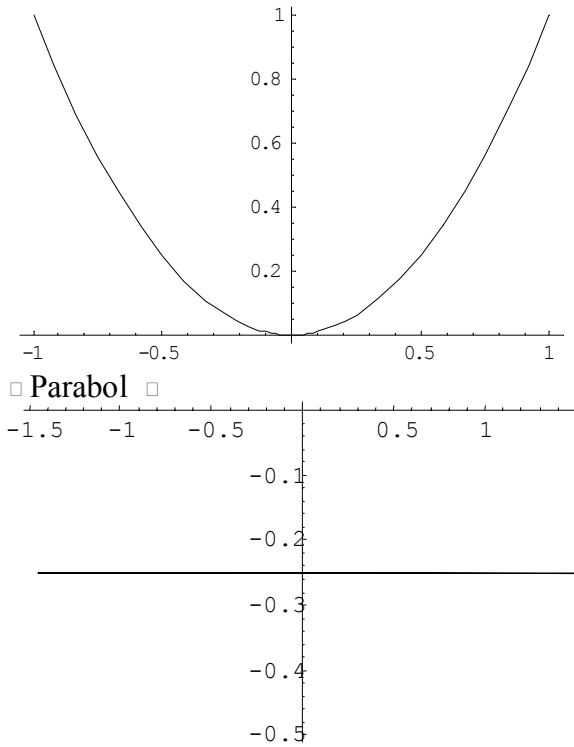
$$X(t) = \frac{16t^4 - 1}{16t^2}$$

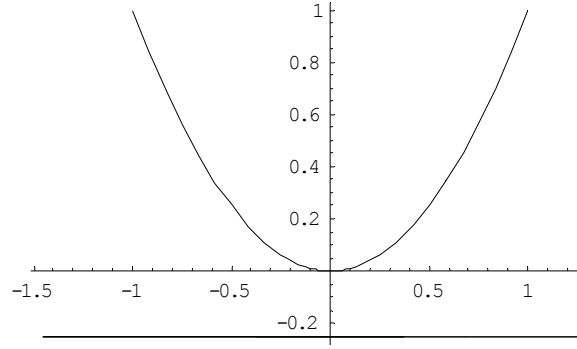
$$Y(t) = \frac{16t^4 + 4t^2 + 1}{16t^2}$$

ortoptiğin parametrik denklemini olur.
Yani;

$$\eta_{\frac{\pi}{2}}(t) = \left(\frac{16t^4 - 1}{16t^2}, \frac{16t^4 + 4t^2 + 1}{16t^2} \right)$$

bulunur.





Şekil.10.5.18.Parabol ve Doğrultmanı

10.5.11. Bir Eğrinin Ortotomik Eğrisi

Tanım: Bir α eğrisinin teğetlerine göre yansıtılmasından oluşan eğriye **Ortotomik Eğri** denir.

Bu tanıma göre; $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisinin teğeti $\alpha(t)$ noktasından geçen ve normali $N(t) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$ olan doğrudur. $P = (x_0, y_0)$ noktasının eğrinin teğetine göre simetriği olan nokta

$$S_{\alpha(t), N}^{(x_0, y_0)} = \left(x_0 - \frac{2\dot{y}(t)(\dot{y}(t)x_0 - \dot{x}(t)y_0 - \dot{y}(t)x(t) + \dot{x}(t)y(t))}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}, y_0 - \frac{2\dot{x}(t)(\dot{y}(t)x_0 - \dot{x}(t)y_0 - \dot{y}(t)x(t) + \dot{x}(t)y(t))}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right)$$

olduğundan

$$\eta(t) = \left(x_0 - \frac{2\dot{y}(t)(\dot{y}(t)x_0 - \dot{x}(t)y_0 - \dot{y}(t)x(t) + \dot{x}(t)y(t))}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}, y_0 - \frac{2\dot{x}(t)(\dot{y}(t)x_0 - \dot{x}(t)y_0 - \dot{y}(t)x(t) + \dot{x}(t)y(t))}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right)$$

α nın **ortotomik eğrisinin parametrik denklemi** olur.

10.5.12. Bir Eğrinin Kaustik Eğrisi

Tanım: Bir α eğrisinin Ortotomik Eğrisinin evolütüne α eğrisinin **Kaustik Eğrisi** denir.

Yukarıdaki kaustik eğri tanımından $\eta(t) = (X(t), Y(t))$ ortotomik eğrinin parametrik denklemi ise

$$\gamma(t) = \left(X(t) - \frac{\dot{Y}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)}{\dot{X}\ddot{Y} - \ddot{X}\dot{Y}}, Y(t) + \frac{\dot{X}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)}{\dot{X}\ddot{Y} - \ddot{X}\dot{Y}} \right)$$

da $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisinin **Kaustik eğrisinin parametrik denklemi** olur.

Örnek: $\alpha(t) = (t, t^2)$ eğrisinin ortotomik ve kaustik eğrilerinin parametrik denklemini yukarıdaki denklemlerden elde edilebilir.

10.5.13.Bir Eğrinin Radyal Eğrisi

Tanım: $P = (x_0, y_0)$ sabit noktasından α eğrisinin eğrilik yarıçapına paralel ve eşit uzunluklu doğruların bitim noktalarının oluşturduğu eğriye α **eğrisinin radyal eğrisi** denir.

Bu tanıma göre ; α eğrisinin radyal eğrisi $\alpha(t)$ noktasındaki evolütün

$$P = (x_0, y_0)$$

noktasına ötelenmiştir yani; α nın radyal eğrisinin parametrik denklemi

$$\tau(t) = \left(x_0 - \frac{\dot{y}(t)(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, y_0 - \frac{\dot{x}(t)(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \right)$$

olur.